

青年数学丛书

# 複数和保角映象

馬庫希維奇著

高 徹 譯



中國青年出版社

1957年·北京

## 序

这本小册子把复数和它的一些最简单的函数(包括儒科夫斯基函数和它在飞机翼型构造上的应用)介绍给读者。叙述采取几何形式。把复数看作有向线段,把函数看作映象。为要引导读者这样来理解复数,我们就从实数和它的运算的几何解释开始讲起。这本小册子是根据作者为九年级和十年級同学作演讲的稿子写成的。并不要求读者先熟悉复数。

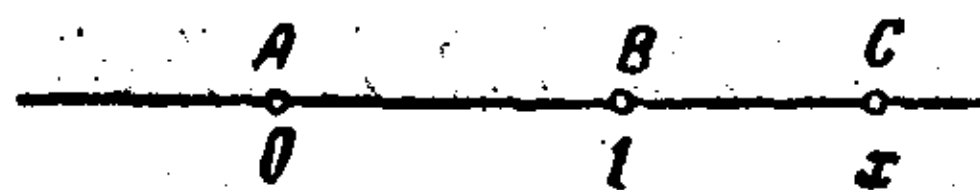
作者

---

А. И. МАРКУШЕВИЧ  
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И  
КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ  
ГОСТЕХИЗДАТ  
МОСКВА, 1954

51.6221
<del>3042</del>
(3)

1. 在作实数的几何表示时, 我們采用了数軸, 也就是采用一条直綫, 在这条直綫上給定一点  $A$  (就是坐标的原点), 表示数目 0, 又給定另一点  $B$ , 表示数目 +1 (图 1).



我們把从  $A$  到  $B$  的方向看作数軸的正方向, 把綫段  $AB$

图 1.

看作長度的單位. 用任何綫段  $AC$  来表示某一个实数  $x$ , 它的绝对值等于这个綫段的長. 如果  $C$  和  $A$  不相重合 (也就是說, 如果数  $x$  不等于 0), 那末当从  $A$  到  $C$  的方向和軸的正方向一致时,  $x$  是正的, 当这方向和軸的正方向相反时,  $x$  是負的.

2. 我們把数軸上的任何綫段都看作有向綫段——直綫上的向量. 我們在每个向量上都分別出始点和終点, 就用从始点到終点的方向作为向量的方向. 写出向量要用兩個字母: 在前面位置的是始点, 在后面位置的是終点. 每一个向量, 不管它的始点是在什么地方 (不一定要在  $A$  点), 都表示某一个实数, 它的绝对值等于向量的長度. 当向量的方向和軸的正方向一致时, 这个数是正数, 当它的方向和軸的正方向相反时, 这个数是負数. 例如, 向量  $AB$  (始点是  $A$ , 終点是  $B$ ) 表示数目 +1, 而向量  $BA$  (始点是  $B$ , 終点是  $A$ ) 就表示数目

-1.

3. 向量的方向也可以用它和軸的正方向之間的交角來決定。要是向量的方向和軸的正方向一致，我們就認為這個角等於 $0^\circ$ 。要是它和軸的正方向相反，我們就認為這個角等於 $180^\circ$ （或 $-180^\circ$ ）。設 $x$ 是一個任意實數；如果 $x \neq 0$ ，那末表示這個數的向量和軸的正方向之間的交角叫做數 $x$ 的幅角。很明顯，正數的幅角等於 $0^\circ$ ，負數的幅角等於 $180^\circ$ （或 $-180^\circ$ ）。數 $x$ 的幅角記作： $\text{Arg } x$ （ $\text{Arg}$ 是拉丁字 *argumentum* 的前三個字母，*argumentum* 在這裡可譯作記號或符號）。數0不是用向量來表示，而是用點來表示的。雖然以後我們會把點看作向量的特殊情形——長度是零的向量，但是在这种情形，我們既不能談論它的方向，也不能談論它和數軸的交角；因此，數0就不會有任何幅角。

4. 我們現在來討論實數運算的幾何解釋。在這裡，應當談談加法和乘法的解釋，從這裡就很容易轉到逆運算——減法和除法的解釋。設 $c_1$ 和 $c_2$ 是兩個實數， $AB_1$ 和 $AB_2$ 是表示它們的向量。我們現在來尋找一條規則，根據這條規則，在知道向量 $AB_1$ 和 $AB_2$ 以後，就可以作出表示和數 $c_1 + c_2$ 或乘積 $c_1 c_2$ 的向量。要想得到表示和數的向量 $AC$ ，應該把表示第一項的向量 $AB_1$ 怎麼辦呢？

容易證明，在任何情形，要想得到表示和數的向量，只須在向量 $AB_1$ 的終點放上一個就長和方向來說都和向量 $AB_2$ 一致的向量 $B_1C$ 就可以了；向量 $AC$ 也就是我們所求的向量（圖2）。

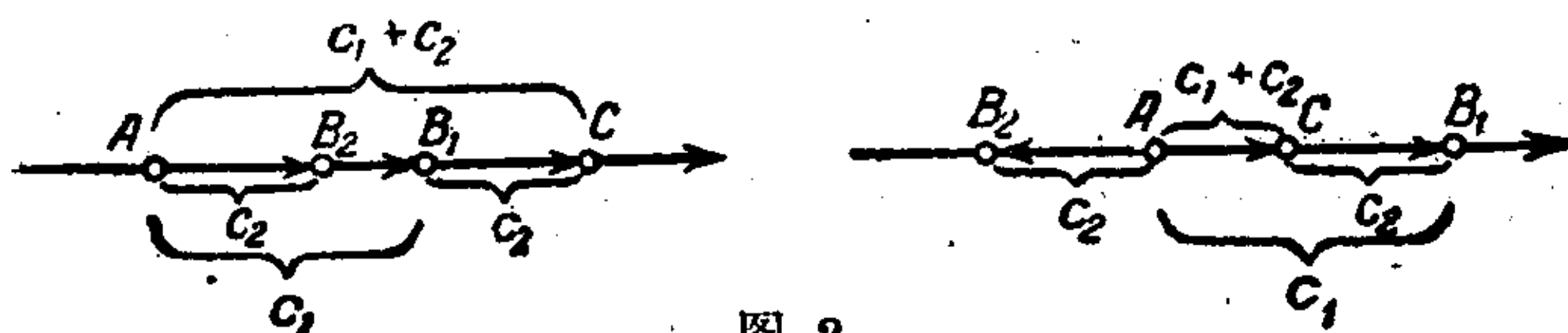


图 2.

5. 現在來討論乘法。如果其中有一个因子等于 0，那末积就等于 0；在这种情形，表示乘积的向量縮成只有一个点。現在假定沒有一个因子等于 0。这时候乘积  $c_1 c_2$  的絕對值<sup>①</sup>就等于  $|c_1| \cdot |c_2|$ ，也就是  $c_1$  和  $c_2$  的絕對值的积。因此，表示乘积的向量  $AD$  的長，就等于表示因子的向量  $AB_1$  和  $AB_2$  的長的乘积。乘积  $c_1 c_2$  的符号，当  $c_2 > 0$  时，和  $c_1$  的符号一致；当  $c_2 < 0$  时，和  $c_1$  的符号相反。換句話說， $AD$  的方向，当  $\text{Arg } c_2 = 0^\circ$ （也就是  $c_2 > 0$ ）时，和  $AB_1$  的方向一致；当  $\text{Arg } c_2 = 180^\circ$ （也就是  $c_2 < 0$ ）时，和  $AB_1$  的方向相反。現在，我們就不难回答这样的問題：要想从表示因子  $c_1$  的向量  $AB_1$  得出表示乘积  $c_1 c_2$  ( $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$ ) 的向量  $AD$ ，应当怎样办呢？要想得出向量  $AD$ ，就应当用  $|c_2|$  去乘  $AB_1$  的長（不改变向量  $AB_1$  的方向），然后把已經改变了的向量轉一个角，这个角等于  $c_2$  的幅角（就是說，如果  $c_2 > 0$ ，轉  $0^\circ$ ；如果  $c_2 < 0$ ，就轉  $180^\circ$ ）；得

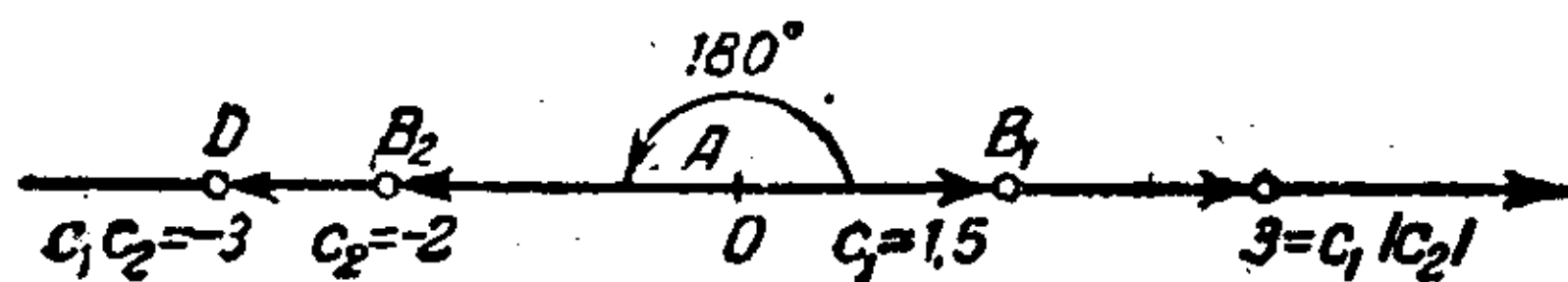


图 3.

① 一数  $c$  的絕對值記作  $|c|$ 。例如， $|5| = 5$ ， $|-3| = 3$ ， $|0| = 0$ 。

到的向量就表示乘积。在图 3 上,用例子 ( $c_1=1.5, c_2=-2$ ) 来说明了这条规则。

6. 我們已經把直綫上的每一个向量同这个向量表示的数联系起来了。現在我們来討論平面上的各种向量,并且把它們也一个一个同它們表示的数联系起来。用这种方法得到的数——复数,是一种比实数更帶有普遍性質的数。实数只是复数的一种特殊情形,正如同整数是有理数的一种特殊情形、有理数是实数的一种特殊情形一样。

我們从这样开始:在我們要討論的向量所在的平面上,引兩条互相垂直的直綫——兩条具有公共原点  $A$  的数軸  $Ax$  和  $Ay$ ,又設綫段  $AB$  是表示單位長度(图 4)。这样,在軸  $Ax$  上或和軸  $Ax$  平行的任何一个向量,仍旧可以看成是实数的几何形象(几何表示)。例如向量  $AB$  和  $A'B'$ ,它們的長都等于一个單位,并且方向和  $Ax$  的正方向相同,它們都表示数目 1;向量  $CD$ ,長等于 2,方向和  $Ax$  的正方向相反,它就表示数目  $-2$ 。不在  $Ax$  上,又不跟这个軸平行的向量,例如  $AE$  和  $FG$ ,

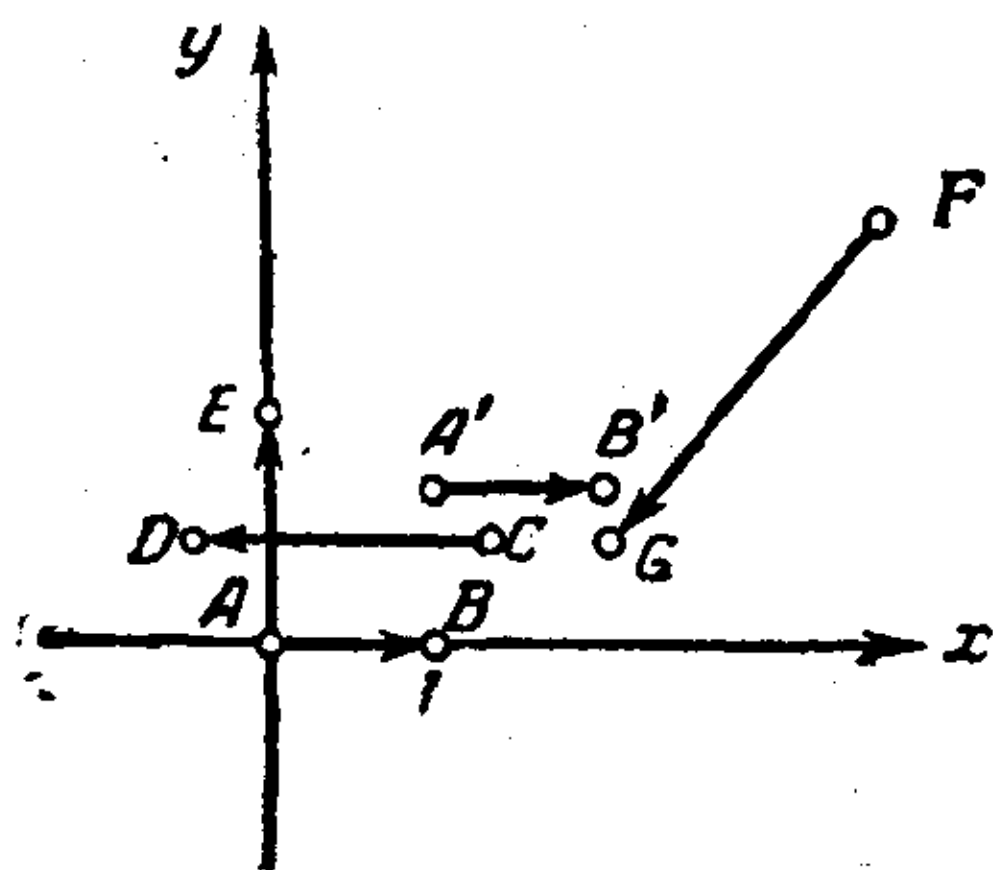


图 4.

不表示任何实数。这种向量我們說它們表示的是虛数。長短相等、互相平行而且方向一致的向量,表示同一个虛数;而長短不等、方向不同的向量,就表示不同的虛数。在这里,我們多少是搶先了一点,因为,还不知道虛数是什么,就已經在談



論它們的形象了；然而在生活里，往往也是先認識形象，然后再認識本質的。

上面我們已經指出，實數的運算可以用表示這些實數的向量的運算來代替。同樣情形，虛數的運算，我們也可以用表示它們的向量的運算來代替。我們不重新發明運算規則，却把已經找到的實數加法和乘法的幾何運算規則保留下來。不同的只是，在實數是用直線  $Ax$  上的向量（或者平行於這條直線的向量）來表示，而虛數却用平面上不在  $Ax$  上、也不和  $Ax$  平行的向量來表示。

7. 在往下討論以前，我們要着重指出，實數（我們已經認識了）和虛數（我們才只就“圖象”知道它）都叫做復數（“復”字是复合的意思）。

對照起來，我們想到，有理數和無理數在合起來討論的時候，也要求一個公共的名稱：實數。

現在來討論復數的加法。我們假定實數加法的規則仍舊有效。設  $AB_1$  和  $AB_2$  是兩個向量，分別表示兩個復數  $c_1$  和  $c_2$ ；要作出表示它們的和  $c_1 + c_2$  的向量，我們從向量  $AB_1$  的終點引向量  $B_1C$ ，長短和方向都跟向量  $AB_2$  一致；

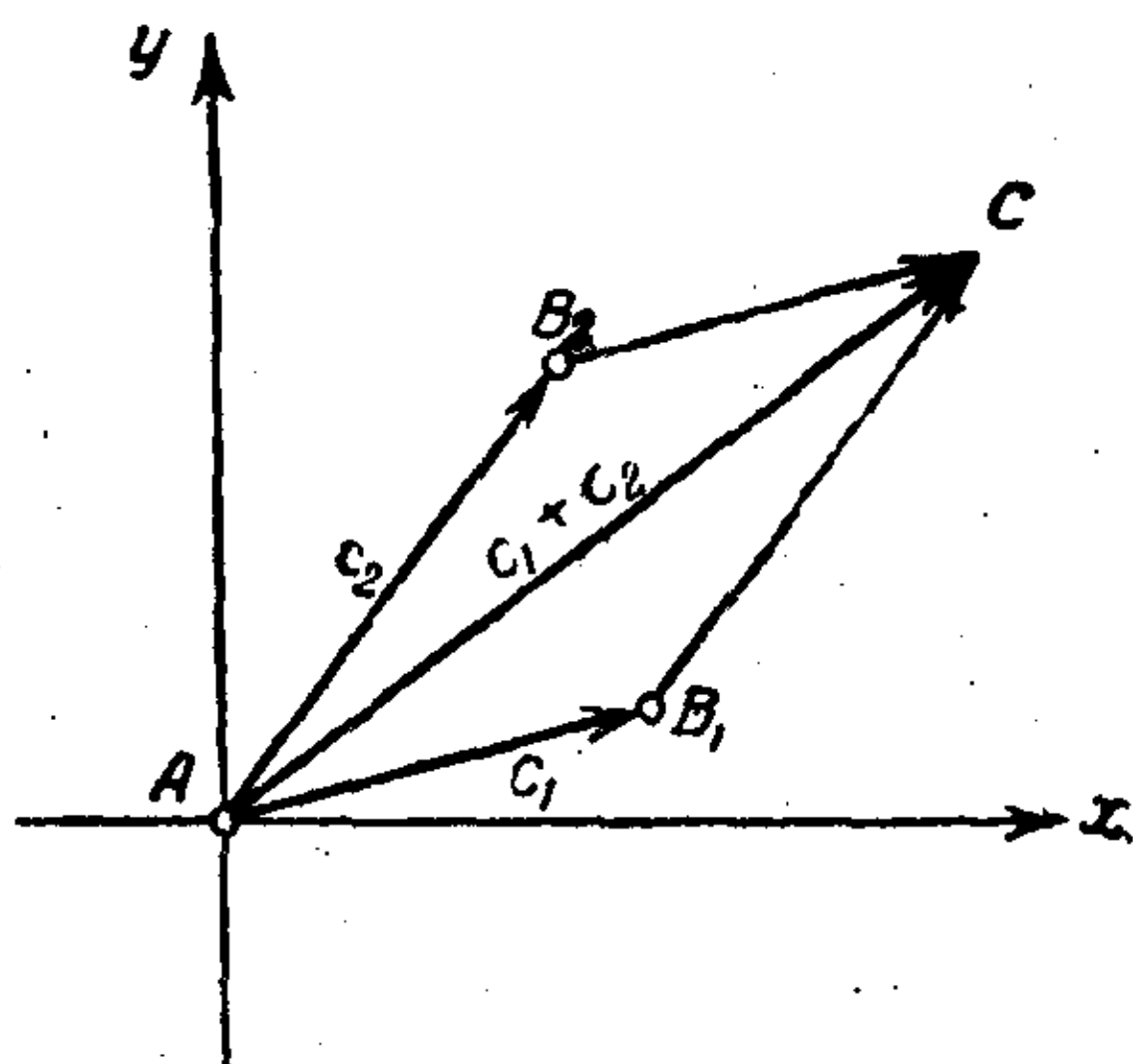


圖 5.

連接  $AB_1$  的始點跟  $B_1C$  的終點的向量  $AC$ ，也就是所求的向

量(图5)。

在这里新的一点是：我們把这条規則运用到了复数(在平面上表示出来的任何向量)的加法，而以前却只是运用在实数(在直綫上表示出的向量)上。

如果运用这条規則来作和数  $c_2 + c_1$  (加項交換了位置)的图形，那末就要从表示  $c_2$  的向量  $AB_2$  的終点引一个向量，它的長短和方向都跟表示  $c_1$  的向量  $AB_1$  一致。显而易见，我們得出了同一点  $C$  (在图5上我們得到了一个平行四边形)，因此，和数  $c_2 + c_1$  跟和数  $c_1 + c_2$  是由同一个向量  $AC$  来表示的。換句話說，从加法規則可以推出交換律的成立：

$$c_2 + c_1 = c_1 + c_2.$$

很容易証明，結合律也成立：

$$(c_1 + c_2) + c_3 = c_1 + (c_2 + c_3).$$

所有必要的作图都画在图6上。显而易见，把  $c_3$  ( $CD$ ) 加上  $c_1 + c_2$  ( $AC$ )，正跟把  $c_2 + c_3$  ( $B_1D$ ) 加上  $c_1$  ( $AB_1$ ) 一样，我們得

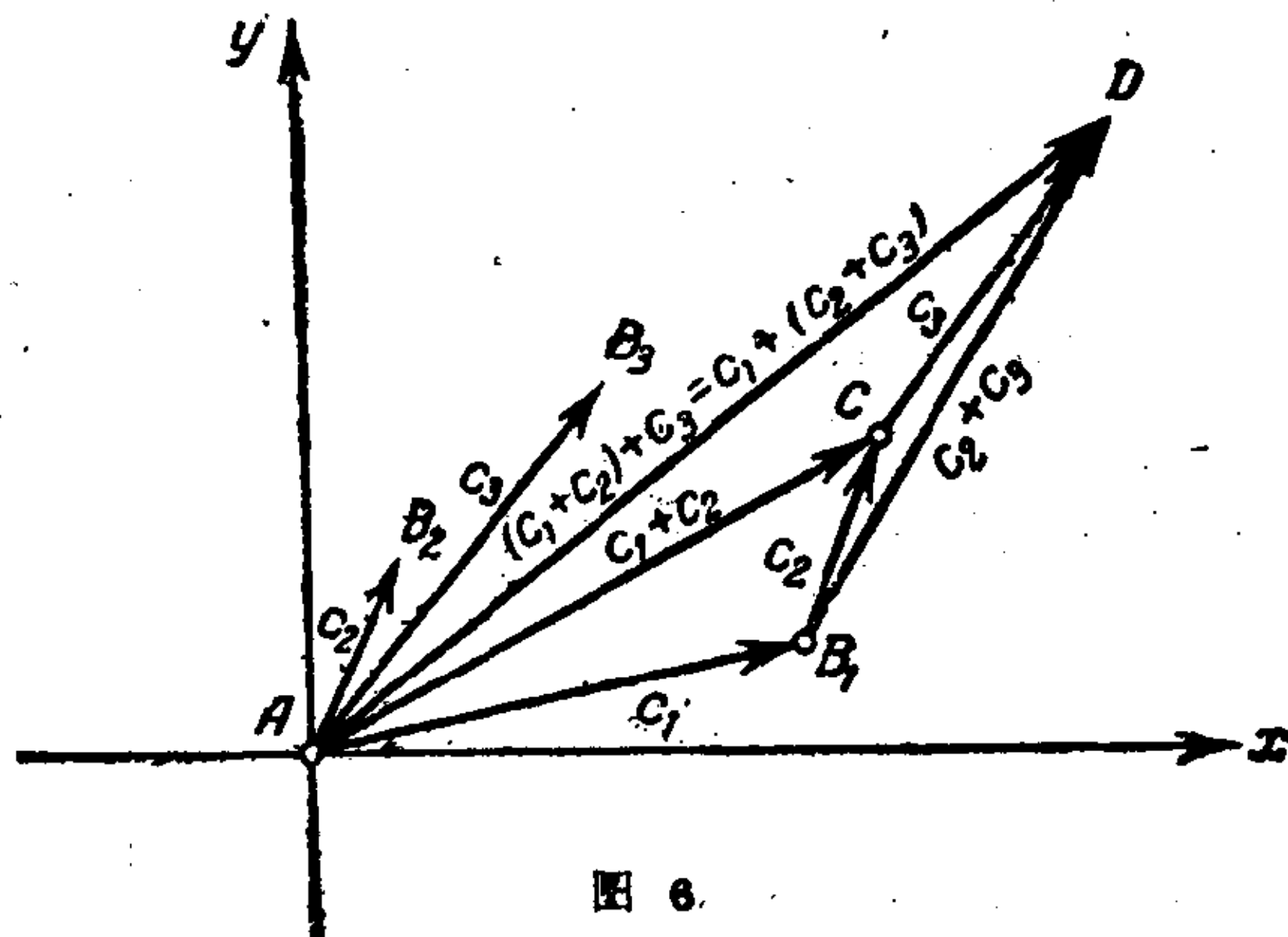


图 6.



出了同一个向量  $AD$ 。

8. 在轉到乘法以前,我們先把絕對值和幅角的概念搬用到复数上来。

設向量  $AB$  表示复数  $c$ 。向量  $AB$  的長就叫做  $c$  的絕對值,而  $c$  的幅角就是軸  $Ax$  的正方向和向量  $AB$  的交角。这个角可以就反时針运动的方向計算,这时候它具有正值,或者沿时針运动的方向計算,这时候它具有負值;此外,还可以随便把它加上  $360^\circ$  的任何整数倍。

跟实数一样,数目  $c$  的絕對值和幅角分別記作:  $|c|$  和  $\text{Arg } c$ 。和实数的情况比較起来,不同的是:虛数的幅角不等于  $0^\circ$  和  $\pm 180^\circ$ ,而实数(不等于 0 的)的幅角可以是  $0^\circ$  (如果它是正数)或  $\pm 180^\circ$  (如果它是負数)。

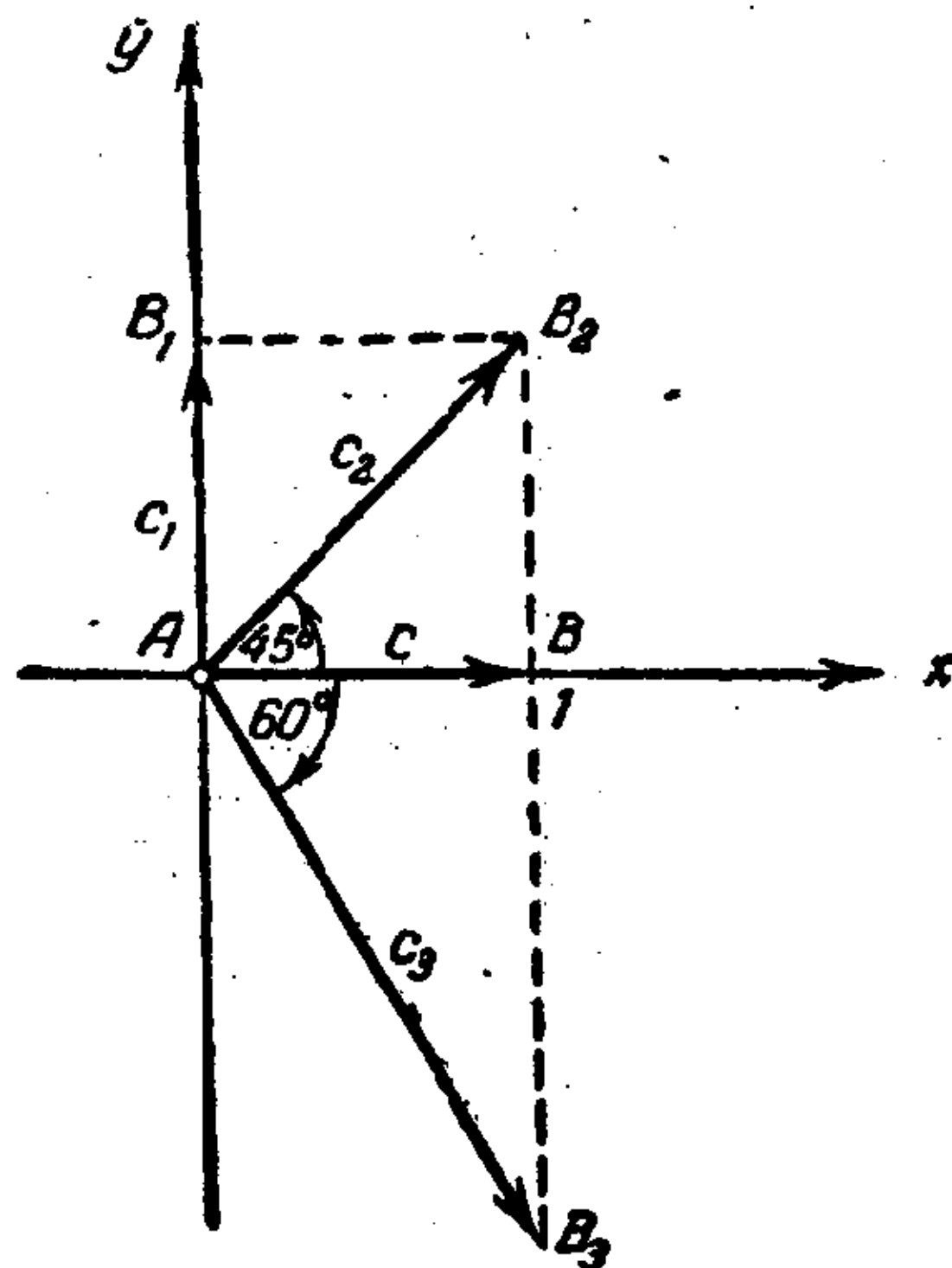


图 7.

在图 7 上画了向量  $AB$ 、 $AB_1$ 、 $AB_2$  和  $AB_3$ ,它們分別表示复数  $c$ 、 $c_1$ 、 $c_2$  和  $c_3$ 。讀者很容易証明下面的式子成立:

$$|c| = |c_1| = 1, \quad |c_2| = \sqrt{2}, \quad |c_3| = 2;$$

$$\text{Arg } c = 0^\circ, \text{Arg } c_1 = 90^\circ,$$

$$\text{Arg } c_2 = 45^\circ, \text{Arg } c_3 = -60^\circ (\text{或 } 300^\circ).$$

9. 在引进复数的绝对值和幅角这两个概念以后, 我们就可以来谈复数的乘法规则了. 在字面上, 它和相应的实数乘法规则是一致的: 要用复数  $c_2$  去乘复数  $c_1$  ( $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$ ), 就必须把  $|c_2|$  去乘表示  $c_1$  的向量的长 (不变更这向量的方向), 然后把已经改变了的向量绕  $A$  点转一个角, 这个角等于  $c_2$  的幅角; 得到的向量就表示乘积  $c_1 c_2$ . 例如, 乘积  $c_1 c_2$  是用向量

$AD$  表示的 (图 8),

而乘积  $c_2 c_1$  是用向量  $AE$  表示的 (图 9):

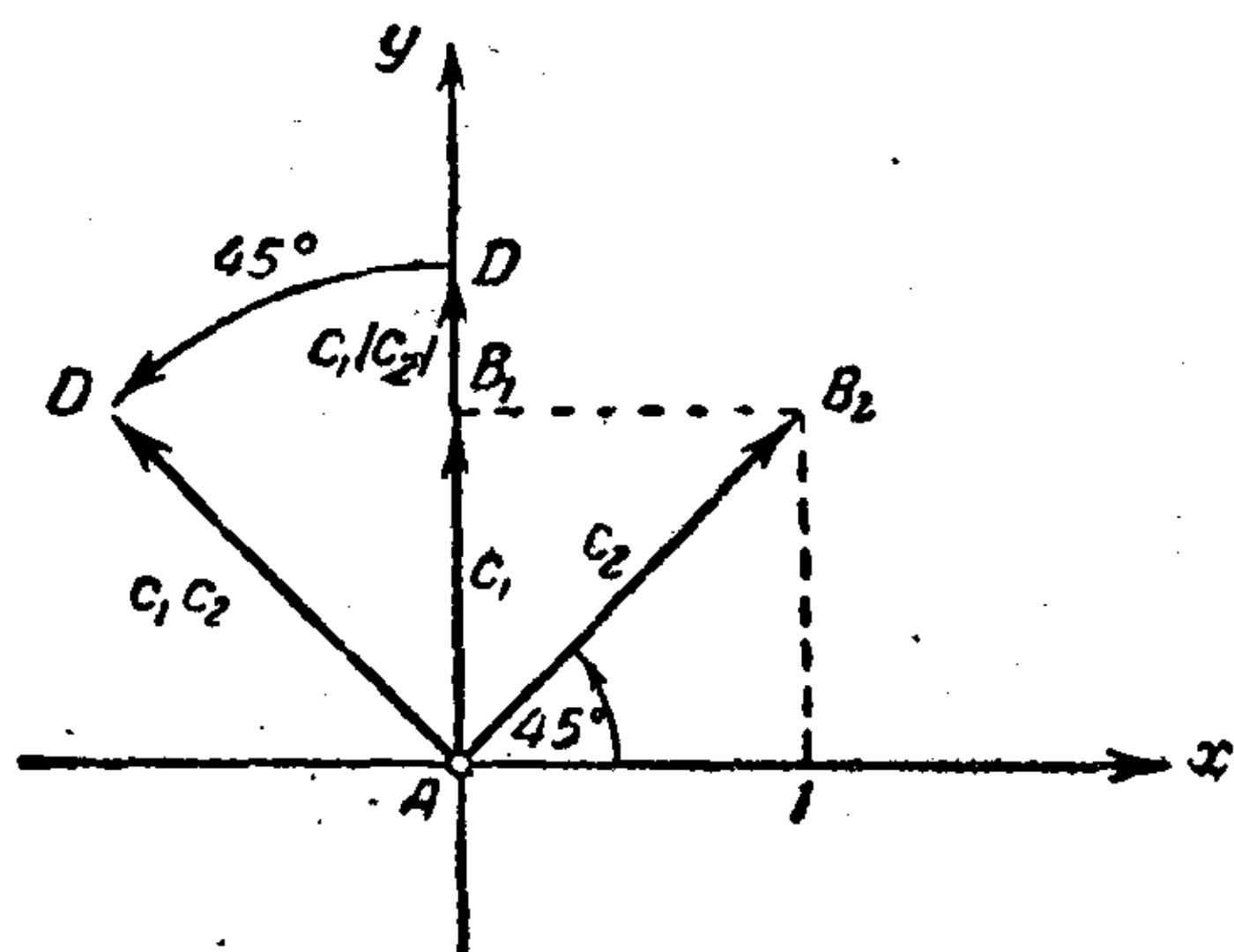


图 8.

对于乘法规则, 还必须加上一点, 就是当其中有一个因子等于零的时候, 乘积也等于零.

如果把乘法规则运用在乘积  $c_2 c_1$  (因子次序改变了), 那末, 就应该把表示  $c_2$  的向量的长改变  $|c_1|$  倍, 并且把已经改变的向量绕  $A$  点转一个角, 这个角等于  $c_1$  的幅角. 显而易见, 得到的结果和乘积  $c_1 c_2$  一样: 在这两种情况, 得到的向量的长都是  $|c_1| \cdot |c_2|$ , 而  $Ax$  和这个向量的交角都等于  $\text{Arg } c_1 + \text{Arg } c_2$ .

于是,

$$c_1 c_2 = c_2 c_1,$$

这就是说, 对于复数乘法, 交换律是成立的.

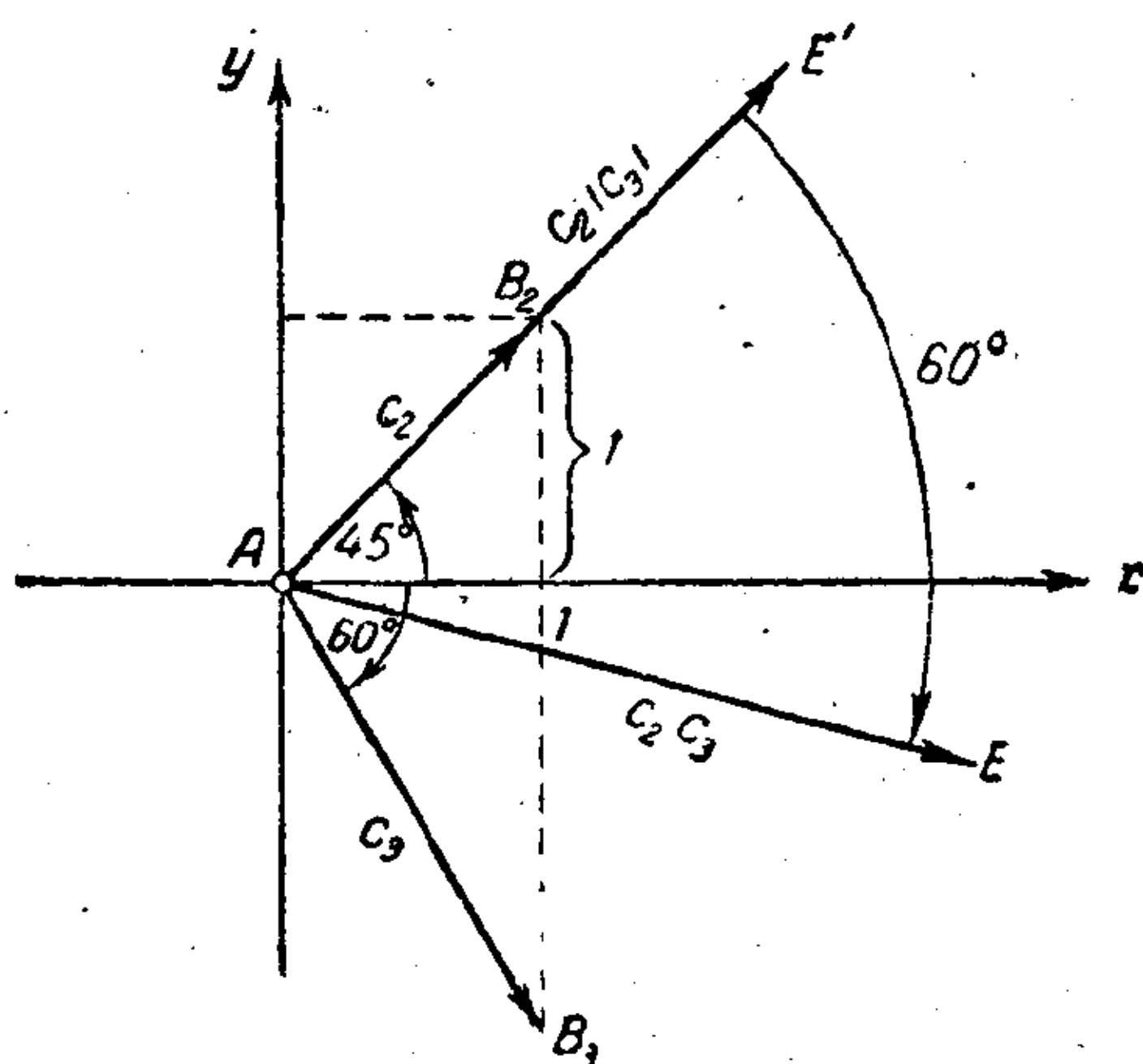


图 9.

同样地, 結合律也成立:

$$(c_1 c_2) c_3 = c_1 (c_2 c_3).$$

事实上, 所討論的这两个乘积, 都是由同一个向量表示的; 这向量的長是  $|c_1| \cdot |c_2| \cdot |c_3|$ ,  $Ax$  軸和它的交角等于  $\text{Arg} c_1 + \text{Arg} c_2 + \text{Arg} c_3$ .

最后, 我們来証明分配律成立:

$$(c_1 + c_2) c_3 = c_1 c_3 + c_2 c_3.$$

在图 10 上, 向量  $AB$  表示和数  $c_1 + c_2$ ; 如果保持  $AB_1$  和  $AB_2$  的方向不变, 把三角形  $AB_1B$  各边的長乘以  $|c_3|$ , 就得到三角形  $AK_1L_1$ , 它和三角形  $AB_1B$  相似. 这个三角形由向量  $AK_1$ 、 $K_1L_1$ 、 $AL_1$  作成, 这三个向量是从向量  $c_1$ 、 $c_2$  和  $(c_1 + c_2)$  把各边的長都变更  $|c_3|$  倍(方向不变)得到的. 現在把三角形  $AK_1L_1$  繞  $A$  点轉  $\text{Arg} c_3$  度角; 就得到三角形  $AKL$ . 按乘法

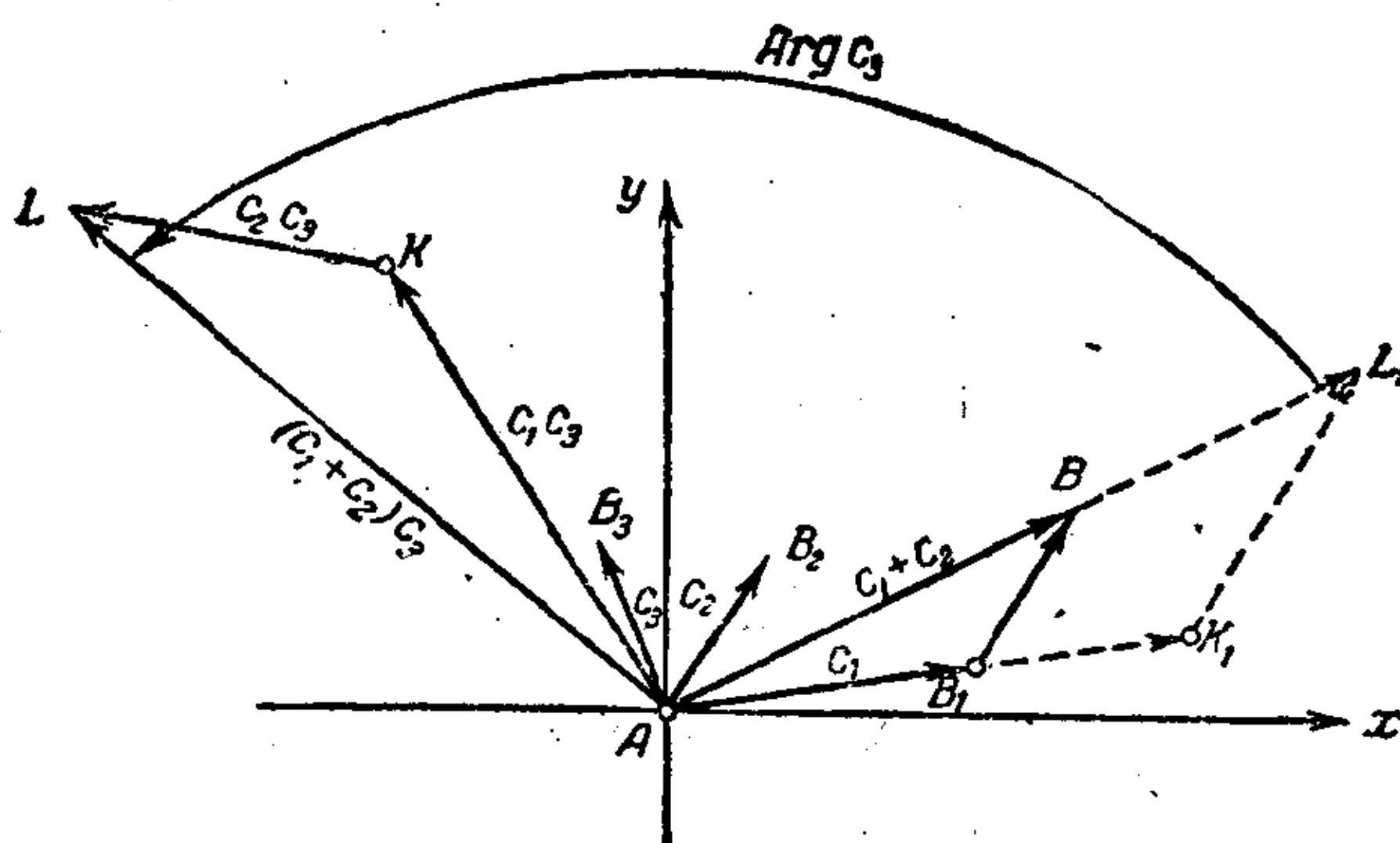


图 10.

規則, 向量  $AK$  是表示  $c_1 c_3$ ,  $KL$  是表示  $c_2 c_3$ ,  $AL$  是表示  $(c_1 + c_2) c_3$ . 按加法規則, 从这个三角形可以得到:

$$c_1 c_3 + c_2 c_3 = (c_1 + c_2) c_3,$$

这也就是要証明的.

10. 減法和除法运算, 在定义上就是加法和乘法的逆运算. 这就是說, 如果有复数  $c_1$ 、 $c_2$  和  $d$ , 而  $c_1 = c_2 + d$ , 也就是  $c_1$  是  $c_2$  跟  $d$  的和, 那末我們就可以把  $d$  叫做  $c_1$  跟  $c_2$  的差, 写作  $d = c_1 - c_2$ . 把  $c_2$ 、 $d$  和  $c_1$  之間的这种关系用图表示出来 (图

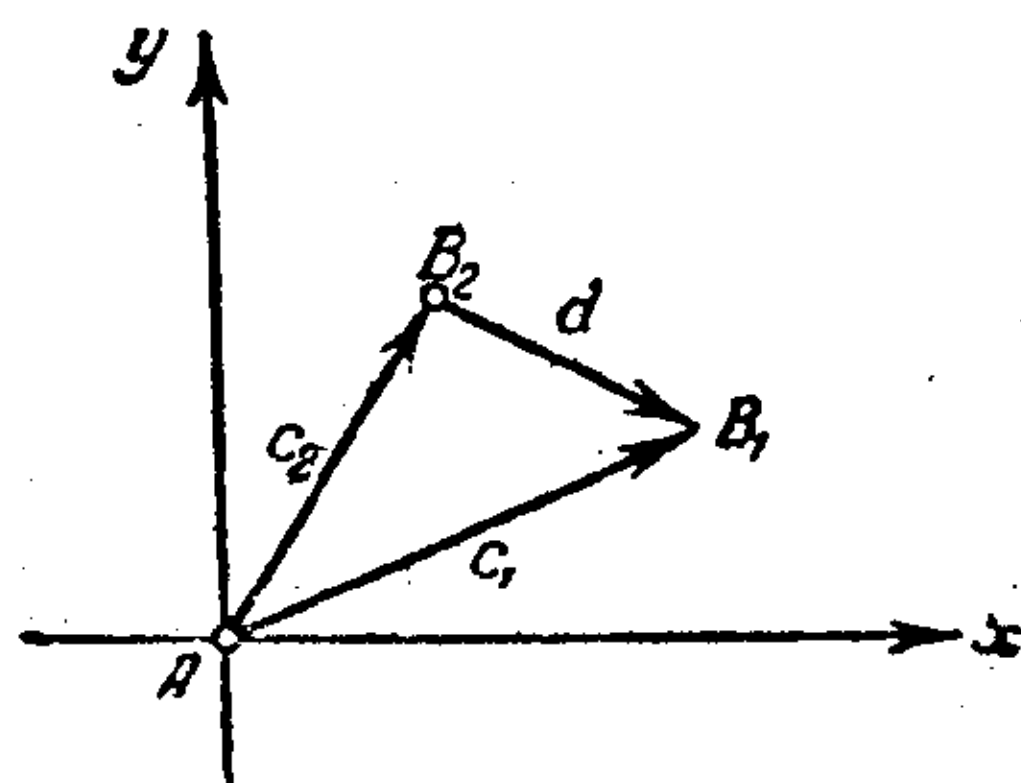


图 11.

11), 我們就可以看到, 如果把  $B_2$  点 (表示減数的向量的終点) 和  $B_1$  点 (表示被減数的向量的終点) 用一向量連接起来, 并且把前一点作为該向量的始点, 后一点作为該向量的

終点,就得到了表示差  $c_1 - c_2$  的向量。

同理,如果有复数  $c_1, c_2 (c_2 \neq 0)$  和  $r, c_1 = c_2 r$ , 也就是說, 如果  $c_1$  是  $c_2$  和  $r$  的积(图 12), 我們就把  $r$  叫做  $c_1$  和  $c_2$  的商, 写作  $r = c_1 \div c_2$  或  $r = \frac{c_1}{c_2}$ 。

从这里可以推知,  $|r|$  ——表示  $r$  的向量的長 ——是  $\frac{|c_1|}{|c_2|}$ ,  $\text{Arg } r$  等于角  $B_2AB_1$ , 这个角是按照从  $AB_2$  到  $AB_1$  方向計算的 (在图12上,这个方向是順时針旋轉的,因而这角應該看作負角)。

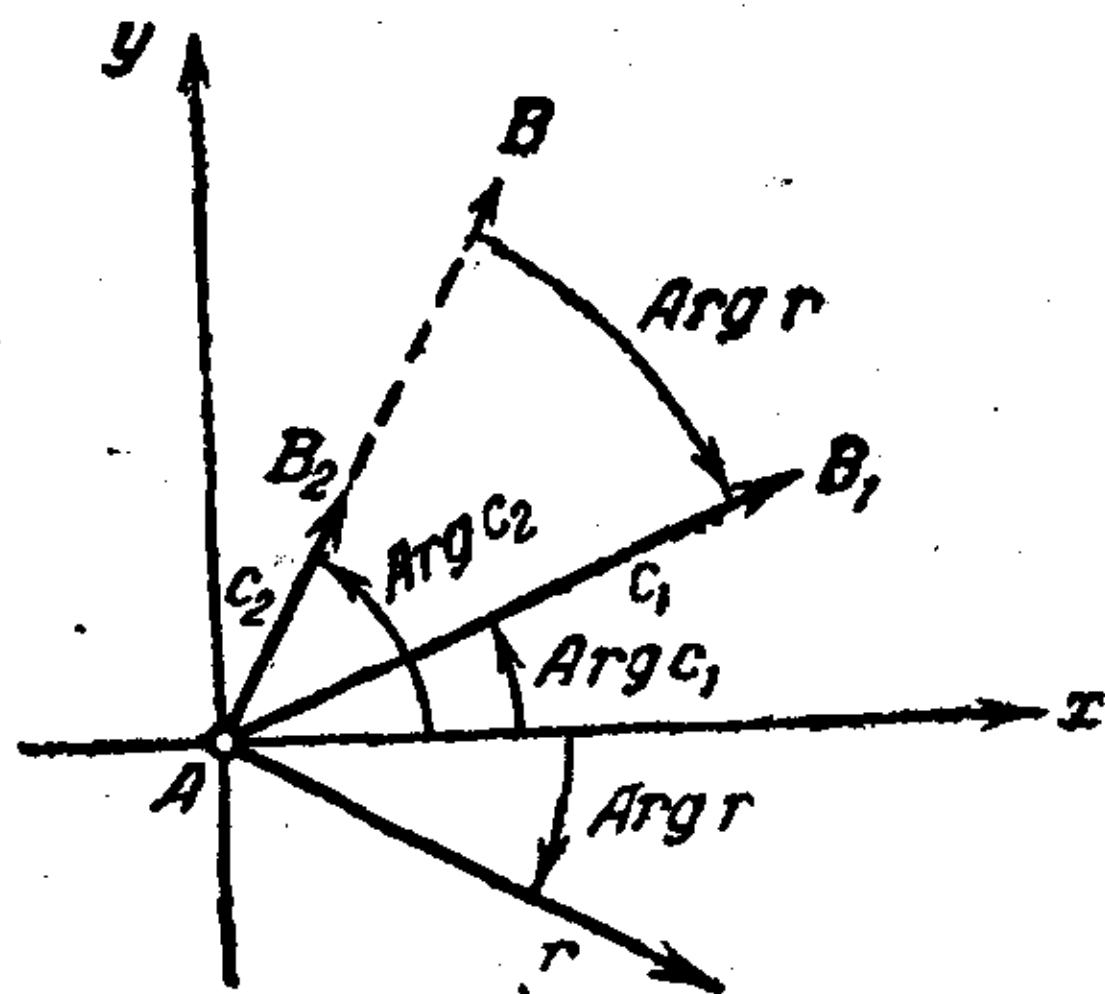


图 12.

我們来注意一些特殊

情形。如果  $c_1$  和  $c_2$  是由平行而且方向一致的向量来表示的, 那末角  $B_2AB_1$  等于  $0^\circ$ , 因而  $\text{Arg } r = 0^\circ$ , 也就是  $r$  是一个正的实数。如果  $c_1$  和  $c_2$  是由平行但方向相反的向量来表示的, 那末角  $B_2AB_1$  等于  $180^\circ$ ,  $r$  是一个負的实数。

总结起来,可以說,复数的加法和乘法跟实数的情形一样,适合于交換律、結合律和分配律;而減法和除法也跟实数的情形一样,在定义上就是加法和乘法的逆运算。因此,代数学中适合于实数的一切运算規則和公式,根据运算的定义和提到的規則,对于复数也应当保持有效。例如:

$$(c_1 + c_2)(c_1 - c_2) = c_1^2 - c_2^2,$$

$$(c_1 + c_2)^2 = c_1^2 + 2c_1c_2 + c_2^2,$$

$$\frac{c_1}{c_2} + \frac{c_3}{c_4} = \frac{c_1c_4 + c_3c_2}{c_2c_4} \quad (c_2 \neq 0, c_4 \neq 0) \text{ 等等.}$$

11. 讀者在學習數學的時候，曾經不止一次地遇到過數的概念的擴充(推廣)。在算術中引進分數時，在代數中引進負數，以及後來引進無理數時，就都是這樣的。數的概念的每一次新的擴充，會使在當時還不可能解決或根本沒有意義的某些問題有可能得到解決。比如說，分數的引用就可以使兩個數目在除數不等于零的所有情況下都可以相除，例如拿3來除4或拿5來除2；負數的引用就可以使減法在任何情況下都能夠進行，例如從2減去5；無理數的引用就可以使任何綫段的長，和單位長不可通約的，都能夠用數來表示，例如邊長等于1的正方形的對角綫的長。然而單只限于實數，我們就不能夠開出負數的平方根了。現在我們來證明，引用了復數就可以解決這個問題。自然，復數  $c$  的平方根(用符號  $\sqrt{c}$  表示)，我們指的是某個復數  $a$ ，它的平方(就是  $a$  的自乘)等于  $c$ 。換句話說， $a = \sqrt{c}$  就是  $aa = c$ 。設  $c$  是一個負數，例如  $c = -1$ ；要想求  $\sqrt{-1}$ ，我們就應當解方程  $a^2 = -1$ 。拿  $a$  來乘  $a$ ，這就是說，先拿  $|a|$  去乘表示  $a$  的向量的長，也就是先拿同樣的長度去乘，而不改變  $a$  的方向；然後，把得到的向量繞  $A$  點轉一個等于  $\text{Arg } a$  的角。顯而易見，求得的向量的長等于  $|a|^2$ 。但是，求得的向量應當表示數目  $-1$ ；因此它的長等于一個單位。於是， $|a|^2 = 1$ ，因而  $|a| = 1$  (向量的長永遠不會是負的)。再有，表示  $a^2$  的向量和  $Ax$  軸的交角等于  $\text{Arg } a + \text{Arg } a = 2\text{Arg } a$ ；另一方面， $a^2 = -1$ ，因而這個角應當等于  $+180^\circ$  或  $-180^\circ$ 。所以  $2\text{Arg } a = \pm 180^\circ$ ，於是  $\text{Arg } a = 90^\circ$  或  $\text{Arg } a$



$= -90^\circ$ 。因此，我們已經得到了兩個不同的向量  $AC$  和  $AC'$ ，表示  $\sqrt{-1}$  的兩個不同的值(图13)。向量  $AC$  表示的虛數記作  $i$ ，叫做虛單位；我們有： $|i| = 1$ ， $\text{Arg } i = 90^\circ$ 。容易明白，向量  $AC'$  表示的虛數可以用  $-1$  乘  $i$  的方法从  $i$  得出。实际上，要用乘法规則来达到这个目的，就

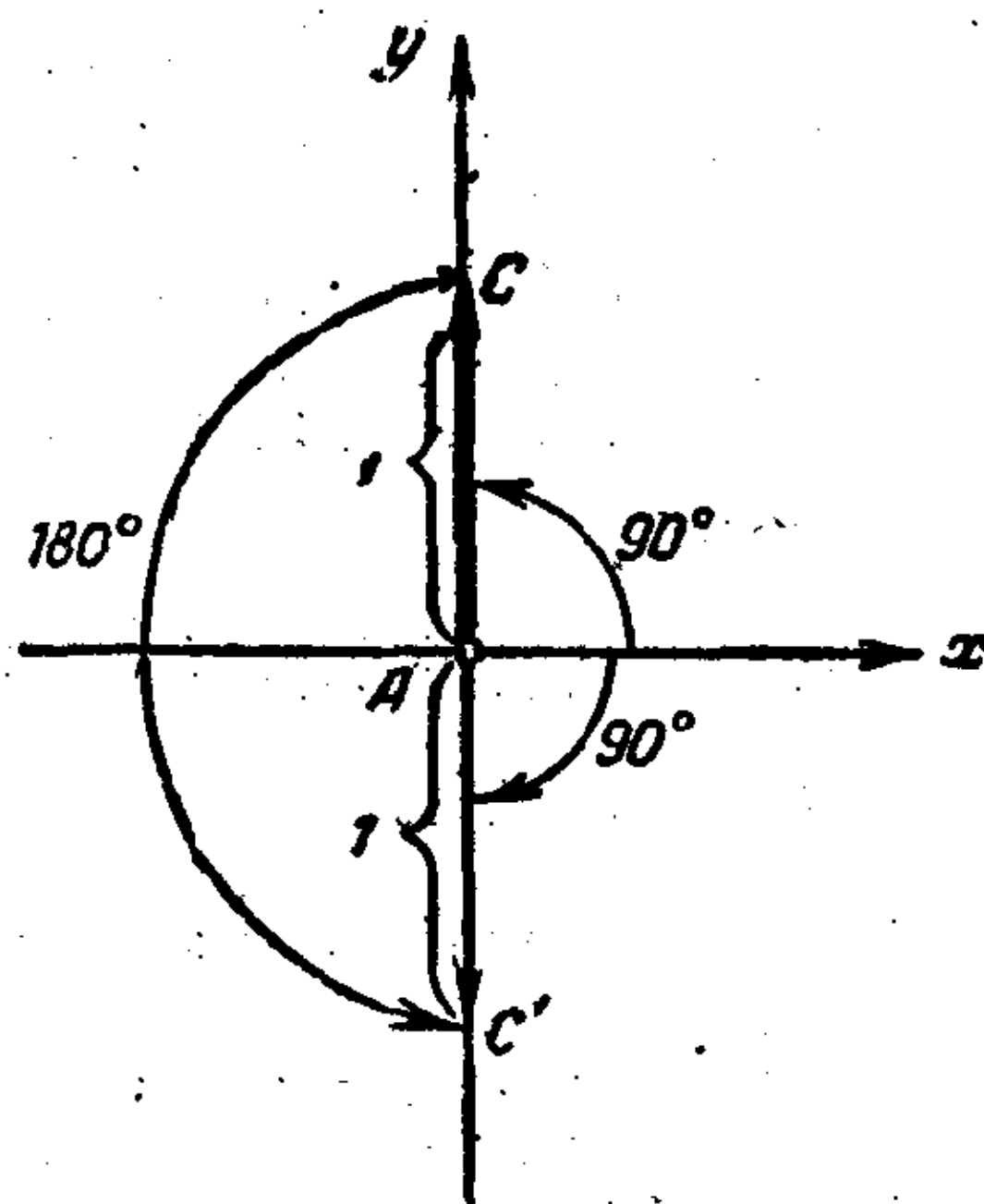


图 13.

应当用  $|-1| = 1$  来乘  $AC$  的長(因此，向量  $AC$  不变)，然后繞  $A$  点轉一个角  $\text{Arg } (-1) = 180^\circ$ ；得到了向量  $AC'$ 。因而，和这向量相对应的虛數是  $i(-1)$  或  $-1 \cdot i$ ，簡写作  $-i$ 。于是， $\sqrt{-1} = \pm i$ 。

12. 我們現在来討論  $Ay$  軸(或和它平行的軸)上的任意向量  $AD$ (图 14)。設它的長等于  $l$ 。如果这个向量的方向和  $Ay$  軸的正方向一致(在  $Ax$  之上)，那末它表示的虛數  $c$  可以用正数  $l$  乘  $i$  得出，因此， $c = l \cdot i$ ，或簡写作  $c = li$ 。

如果  $AD$  的方向和  $Ay$  的正方向相反，那末数  $c$  可以用負数  $-l$  乘  $i$  得出(或者用  $l$  乘  $-i$  得出)；因此，在这种情形， $c = (-l) \cdot i$ ，或簡写作  $c = -li$ 。

由此可見，在  $Ay$  軸(或和它平行的軸)上的任何(長度不等于 0 的)向量，都表示  $\pm li$  形式的虛數，在这里，取  $+$  号或取

一号,是由向量的方向跟 $Ay$ 的正方向相同与否来决定的。由于这种原因, $Ay$ 轴叫做虚轴。 $Ax$ 轴所有的向量都表示实数,它叫做实轴。

我们现在来讨论不在任何轴上、也不和轴平行的任何向量 $A'E'$ 。照图15指示的作图方法,我们可以把这个向量表示的数 $c$ 表示成两个别的数的和:一个由平行于 $Ax$ (或在 $Ax$

上)的向量 $A'B'$ 表示,另一个由平行于 $Ay$ 的向量 $B'E'$ 表示。但是, $A'B'$ 表示某一个实数 $a$ , $B'E'$ 表示某一个虚数 $bi$ ,因此 $c = a + bi$ 。

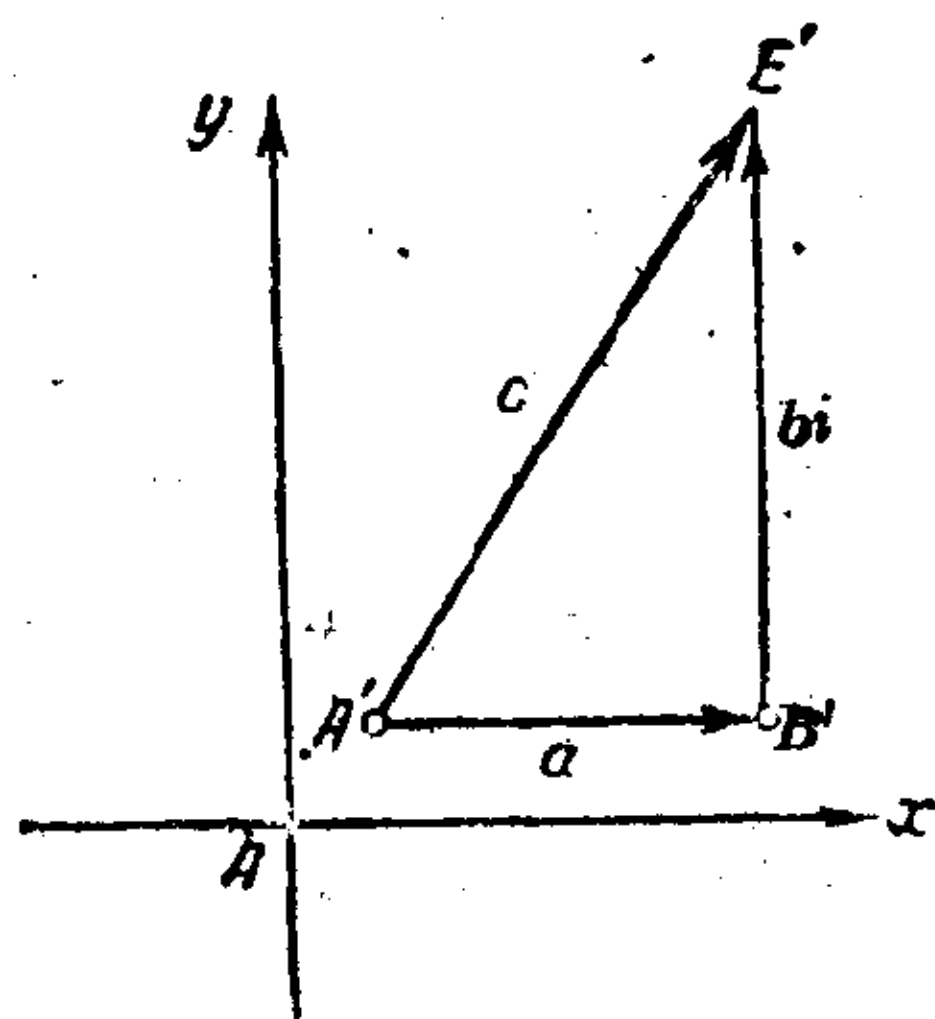


图 15.

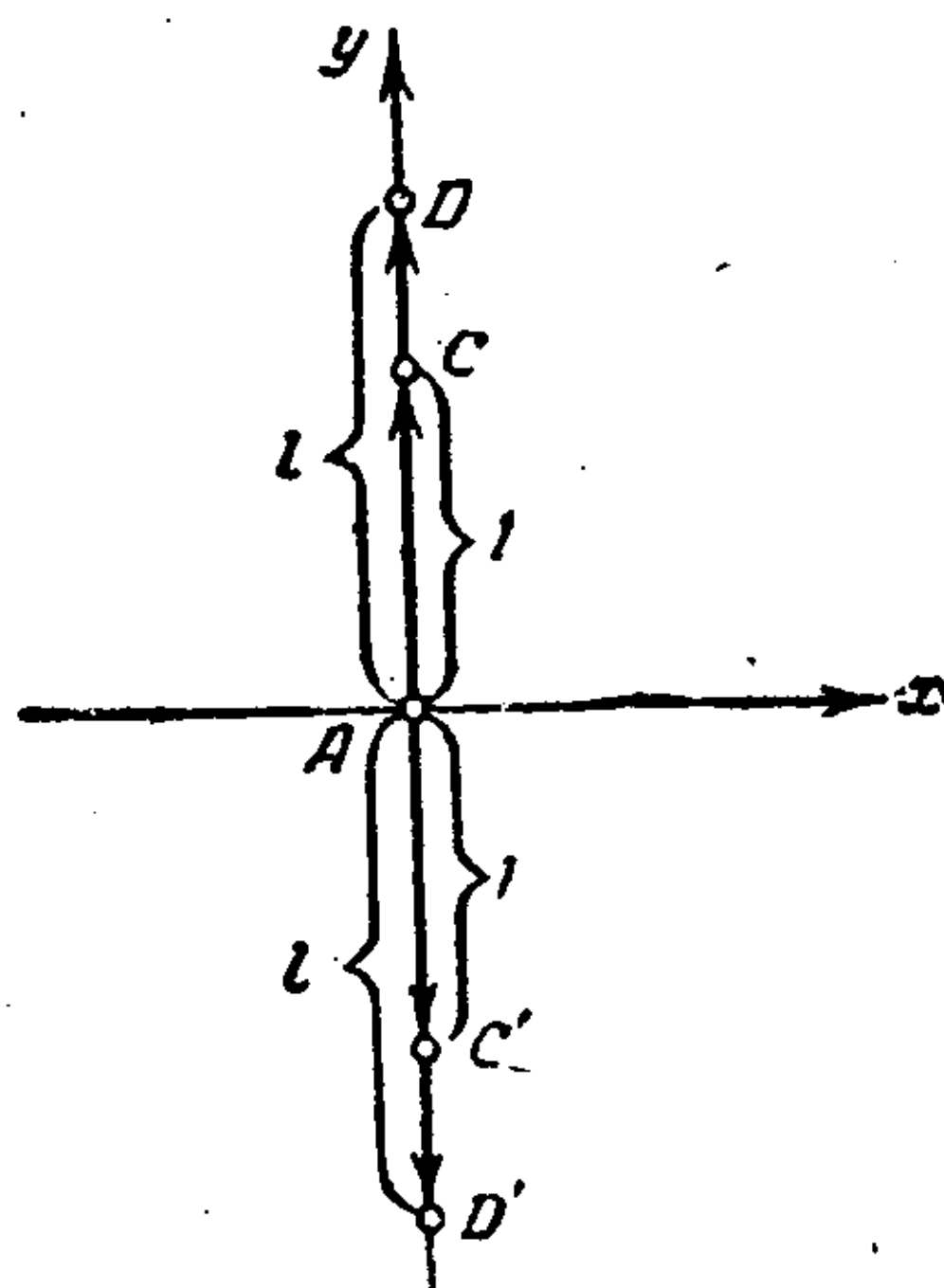


图 14.

这样,我们已经把虚数 $c$ 用实数 $a$ 和 $b$ 以及虚单位 $i$ 表示出来了。因为向量 $A'E'$ 和任何轴都不平行,所以 $a \neq 0, b \neq 0$ 。容易明白,平行于某一轴的向量表示的数,也可以写成类似的形式。就是说,如果向量和实轴平行,它表示的是 $a + 0 \cdot i$ 形式的数,如果向量和虚轴平行,它表示的就是 $0 + bi$ 形式的数。

由此可见,每一复数 $c$ 都可

以表示成  $c = a + bi$  的形式, 在这里,  $a$  和  $b$  是实数,  $i$  是虚单位。

13. 现在来总结一下。我们开始的时候用在同一直线上的向量来表示实数, 把实数运算化成向量运算以后, 就使实数运算具有了几何形式, 然后我们把平面上的各种向量看成是表示更普遍形式的数——复数, 这种数只有在特殊情况下(当向量在  $Ax$  轴上或和轴平行时)才是实数。把直线上向量的运算推广到平面上的向量上去, 我们就引进了加法运算和乘法运算(然后是它们的逆运算——减法和除法), 并证明, 它们也服从和实数运算一样的规律。这时候, 对于复数本身, 我们知道的, 只是它们都可以用向量来表示, 并且任何两个向量, 如果长相等、互相平行、方向一致, 就表示同一个复数, 长不等、或方向不同, 就表示不同的复数。我们证明, 复数可以使  $-1$  开方, 并且引入了虚单位  $i$ , 它是  $\sqrt{-1}$  的两个值中的一个(幅角是  $90^\circ$  的那一个根的值)。最后, 根据复数运算的规则, 我们证明了, 每一个复数  $c$  都可以表示成  $c = a + bi$  的形式, 在这里,  $a$  和  $b$  是实数。

由此可知,  $c$  是由  $a$  和  $bi$  两项组成的; 其中的一个—— $a$ ——由实轴上的向量来表示, 可以看作是实数  $a$  和实单位的积; 另一个—— $bi$ ——由虚轴上的向量来表示, 可以看作是实数  $b$  和虚单位  $i$  的积。复数的这种结构, 使我们了解到, 为什么所有这些数都叫做复数(就是复合数)的道理。

注意, 我们把  $a$  叫做数  $c$  的实部分, 把  $b$  叫做虚部分。例如, 数  $c = 3 - 2i$  的实部分等于 3, 虚部分等于  $-2$ 。

14. 如果用从同一点  $A$  开始的向量来表示复数  $c$ , 那末不相等的复数对应着不相同的向量, 反过来也是一样; 不同的向量对应着不同的复数。設  $c = a + bi$ ; 那末表示数  $c$  的向量

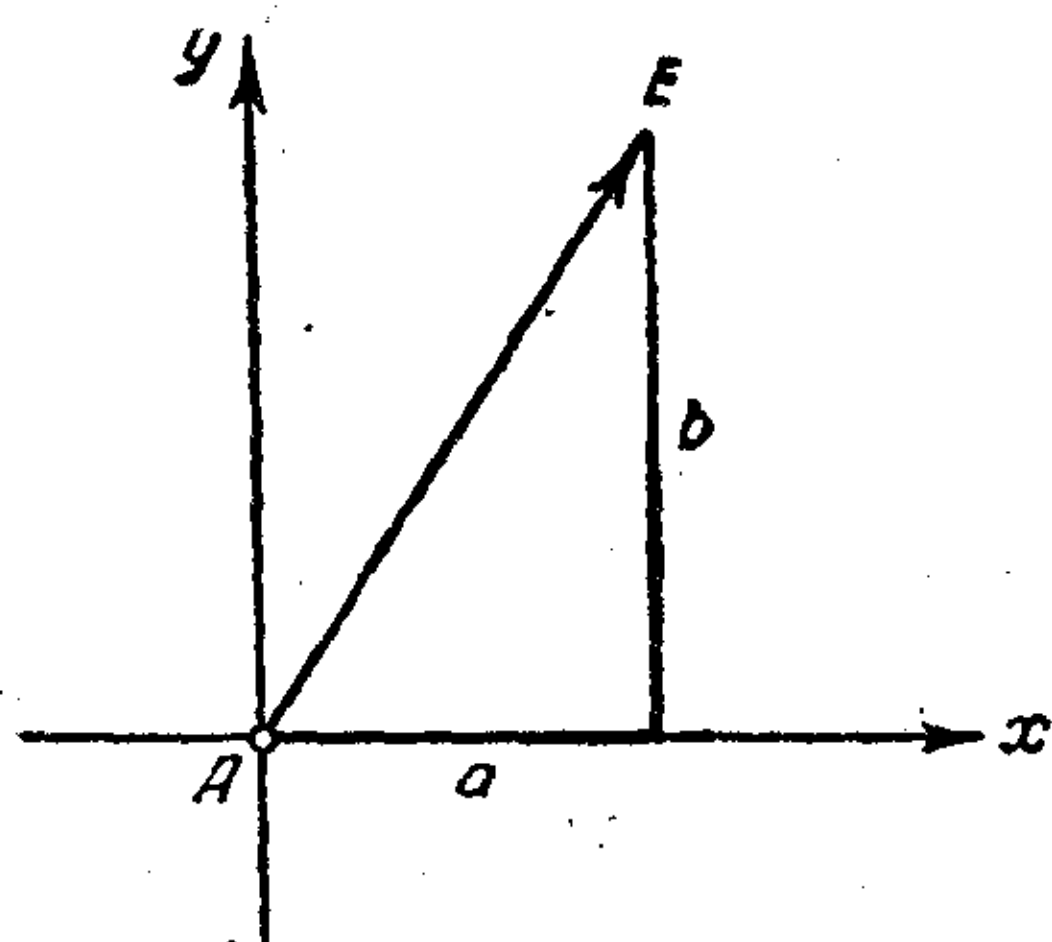


图 16.

$AE$  的終点, 就具有横坐标  $a$  和縱坐标  $b$  (图 16)。

由此可見, 如果表示数  $c = a + bi$  的向量的始点落在坐标軸的原点  $A$ , 那末数  $a$  和  $b$  就是这个向量的終点的坐标。采取这种看法, 在几何学上就不

但可以用向量来表示复数, 而且还可以用点来表示复数。也就是每一个复数  $a + bi$  都可以用坐标是  $a$  和  $b$  的一个点  $E$  来表示, 反过来也一样: 坐标是  $a'$  和  $b'$  的点  $E'$  可以看作是表示复数  $a' + b'i$  的。

图17上画的点  $E_1$ 、 $E_2$ 、 $E_3$ 、 $E_4$  和  $E_5$ , 依次表示下列諸数:  $-1$ ,  $i$ ,  $-i$ ,  $1+i$ ,  $1-i$ 。

以后为簡便起見, 我們把复数  $z$  本身以及表示它的点  $E$  都叫做“点  $z$ ”。

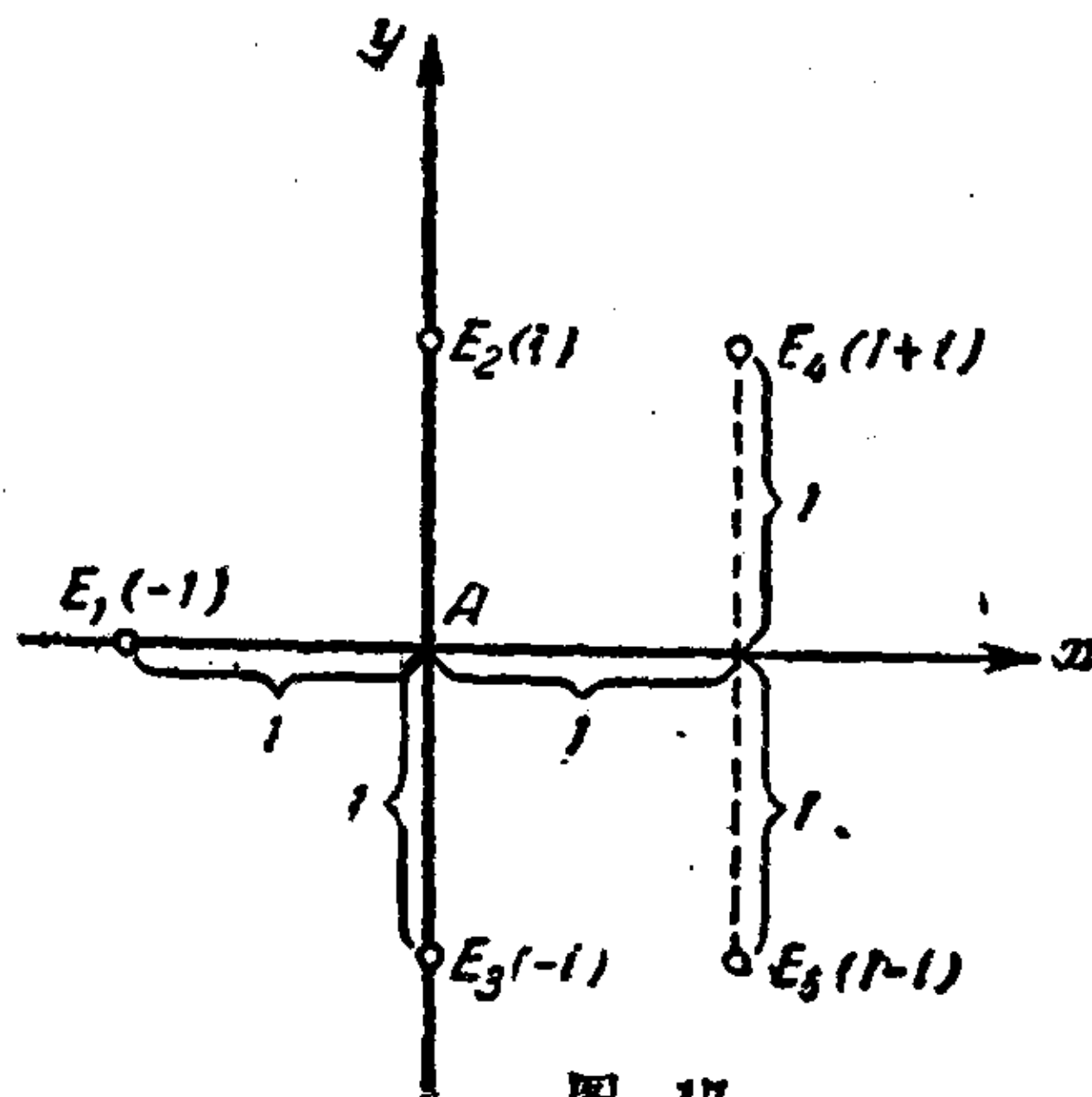


图 17.

例如,“点  $1+i$ ”是指复数  $1+i$  本身和表示它的点  $E_4$  (图17). 在文字里会看得出它表示的究竟是哪一个意义. 但是,最好能养成习惯,不去思索这个问题,而把这两个意义看成同一个意义.

15. 设  $z$  是某一个点. 如果  $z$  加上了某一数  $a$ , 就得到新的点  $z' = z + a$ . 显而易见,从点  $z$  转变到点  $z'$ , 可以用移动(或搬动)向量  $a$  的办法得出,也就是把点  $z$  沿向量  $a$  的方向移动一个和这向量的长相等的距离(图 18). 选取适当的  $a$ , 就可以得到点  $z$  的任何移动位置. 例如,假使点  $z$  需要沿轴  $Ax$  的正方向移动一个单位,我们就取  $a=1$ ; 于是得到点  $z' = z + 1$ . 又,假使  $z$  需要沿轴  $Ay$  的负方向移动两个单位,我们就取  $a = -2i$ ; 于是得到点  $z'' = z + (-2i) = z - 2i$  (图 19).

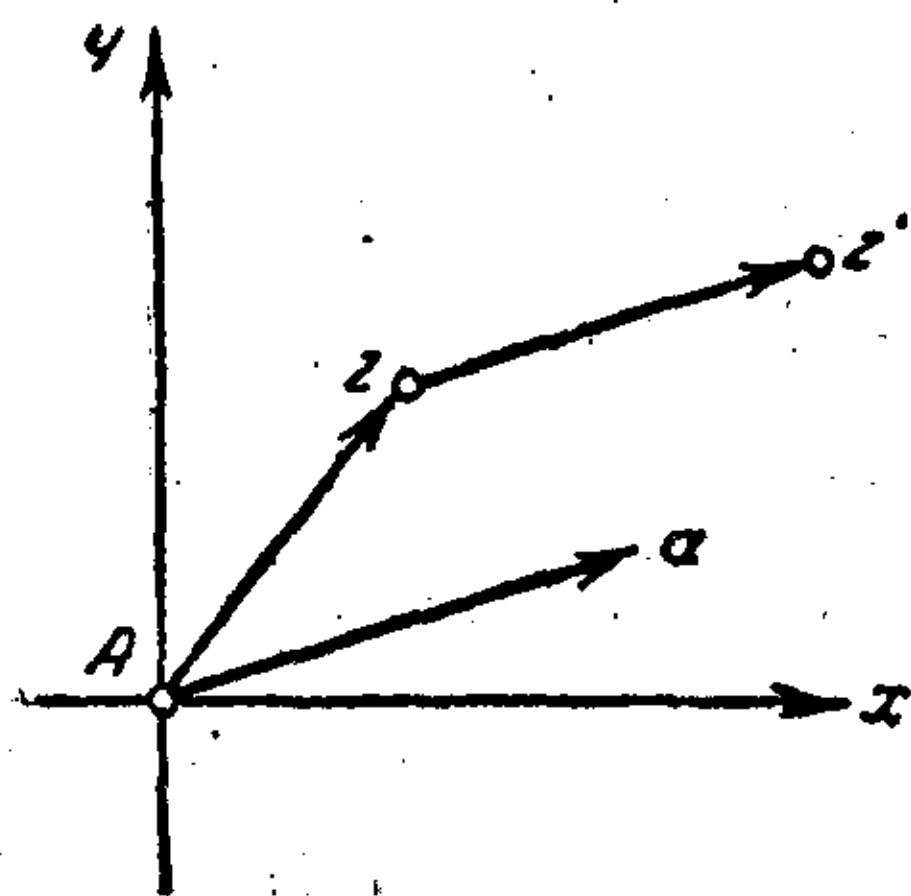


图 18.

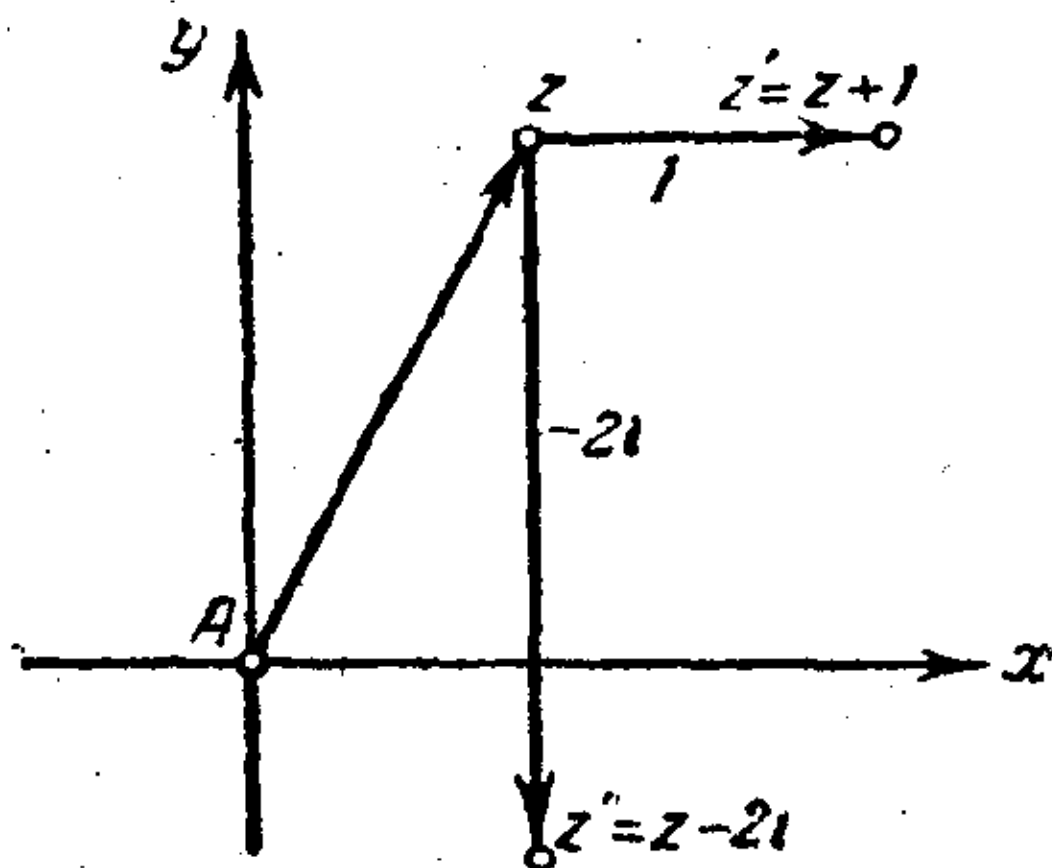


图 19.

由此可见,加法运算  $z' = z + a$  在几何上就是表示点  $z$  移动一个向量  $a$ .

16. 我们现在来讨论用某一个数  $c \neq 0$  来乘  $z$  的乘法运算. 要用  $c$  乘  $z$ , 就必须用数  $|c|$  去乘向量  $AE$  的长(就是数

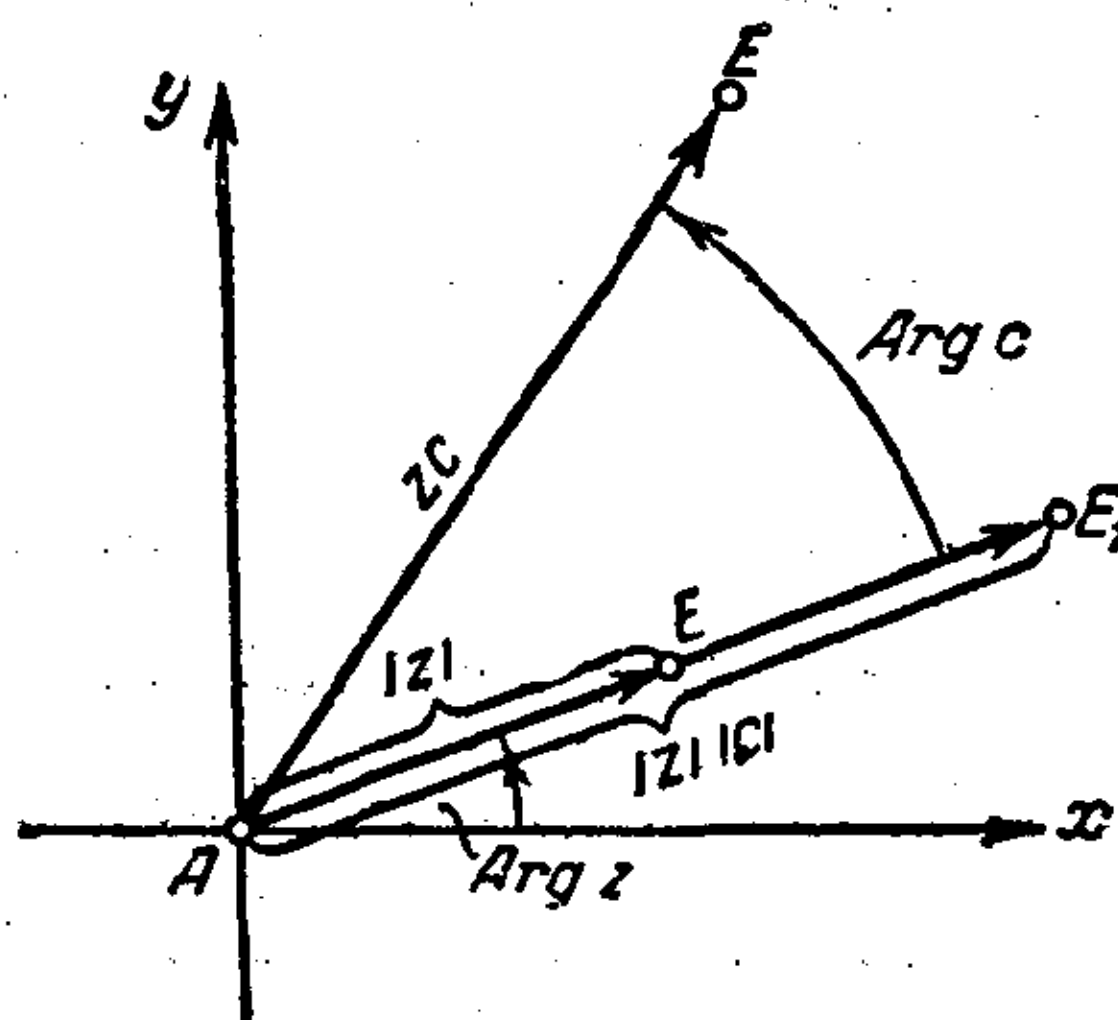


图 20.

$|z|$ ), 并且把得到的向量转动一个等于  $\text{Arg } c$  的角 (图 20). 前一个运算不改变向量  $AE$  的方向, 而只能变更它的长度. 就是说, 如果  $|c| < 1$ , 这个长度就缩短, 如果  $|c| > 1$ , 这个长度就增大, 如果  $c = 1$ , 那末它就保持不

变. 我们把这运算叫做把向量  $AE$  伸長到  $|c|$  倍. 在这里, “伸長”一詞是在附有条件的意义下来理解的; 事实上, 伸長只是在  $|c| > 1$  时才发生, 这时候, 向量  $AE$  的長在乘过后, 就加長到了  $|c|$  倍. 但是, 当  $|c| = 1$  (向量  $AE$  的長不变) 以及  $|c| < 1$  时 (乘过后向量  $AE$  的長縮短), 我們还是說伸長.

如果  $c$  是一个正的实数, 那末  $\text{Arg } c = 0$ .

在这种情形, 转动角度  $\text{Arg } c$ , 由伸長而得到的向量  $AE_1$  并不改变; 因此, 点  $E_1$  就表示乘积  $zc$ . 可以这样說, 用正的实数  $c$  乘  $z$ , 在几何上就是表示向量  $AE$  (表示  $z$  的) 伸長到  $c$  倍. 变动  $c$ , 可以得出向量  $AE$  的各种倍数的伸長. 例如, 要得到兩倍的伸長, 应该用 2 乘  $z$ ; 要得到  $\frac{2}{3}$  倍的伸長, 应该用  $\frac{2}{3}$  乘  $z$ .

如果因子  $c$  不是正的实数, 那末  $\text{Arg } c$  就不等于零. 在这种情形, 用  $c$  乘  $z$  就不只是向量  $AE$  的伸長, 而且还要求把伸長了的向量繞  $A$  点轉一个  $\text{Arg } c$  的角. 因此, 在一般情形, 乘



法运算  $z \cdot c$  既表示伸長(到  $|c|$  倍),也表示旋轉(一个  $\text{Arg } c$  的角)。在特殊情形,当  $c$  的絕對值等于1时,用  $c$  乘  $z$  就只是把向量  $AE$  繞  $A$  点轉一个  $\text{Arg } c$  的角。适当地选取  $c$ ,就可以使  $AE$  轉过任意的角度。比如說,要想使  $AE$  順正方向(反时針方向)轉  $90^\circ$  角,那末就用  $i$  来乘  $z$ ;实际上,  $|i|=1, \text{Arg } i=90^\circ$ 。要想使  $AE$  順負方向(順时針方向)轉  $45^\circ$  角,那末就用复数  $c$  来乘  $z$ ,这个  $c$  的絕對值等于1,幅角等于  $-45^\circ$ 。靠图 21 的

帮助,很容易求出这个数来,在图 21 上,画了一点  $C$ ,它表示数  $c$ 。显而易见, $C$  点的坐标是这样:  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 因此,  $c = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。由此可見,用  $c = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$  乘  $z$

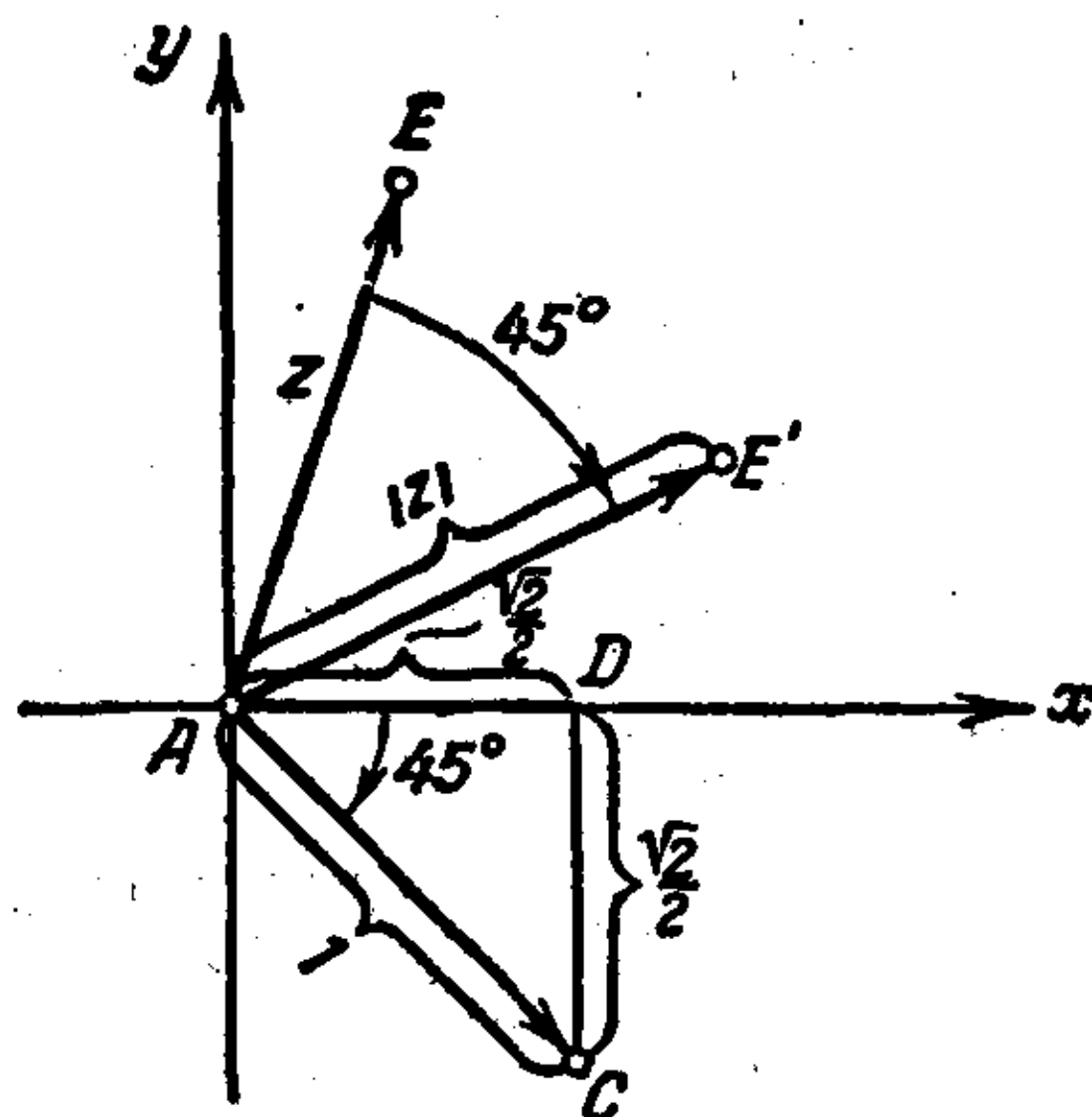


图 21.

跟把(表示  $z$  的)向量  $AE$

繞  $A$  点按負方向轉  $45^\circ$  角是意义相同的。

17. 我們已經看到,公式  $z' = z + a$  或  $z' = cz$  把点  $z$  变到点  $z'$ 。現在讓我們来討論不是一个点、而是点  $z$  的一个无穷集合,这个无穷集合組成了某一个几何图形  $P$  (比如說,是一个三角形;如图 22)。如果我們把公式  $z' = z + a$  应用到每一个点  $z$ ,那末移动一个向量  $a$ ,就可以从旧的点  $z$  得到新的点  $z'$ 。由移动得到的一切点組成一个新的图形  $P'$ 。显然,如果把整个图形  $P$  作为一个整体,移动向量  $a$ ,我們也可以得到图形  $P'$ 。

这样看来, 利用公式  $z' = z + a$ , 不但可以变换一个点, 而且还可以变换整个图形 (点的集合). 这个变换就是把图形移动向量  $a$ . 自然, 新的图形和原来的图形是相等 (重合) 的.

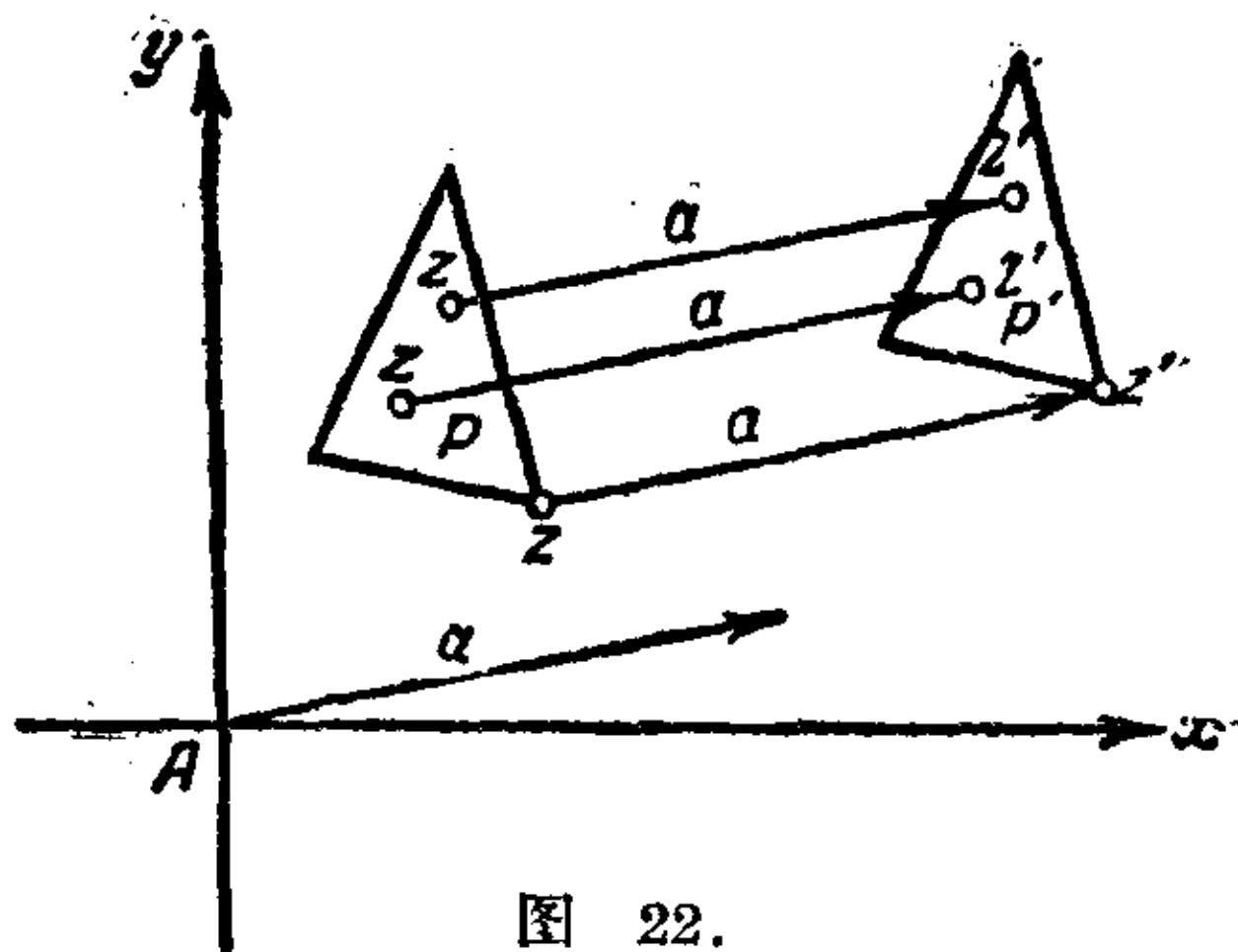


图 22.

18. 我們可以把公式  $z' = cz$  应用到图形  $P$  的每一个点上. 如果  $c$  是正的实数, 那末在图形  $P$  上的每一个点  $z$  变换成了新的点  $z'$ , 而  $z'$  都在  $A$  点到  $z$  点的射綫上, 同时比值  $\frac{|z'|}{|z|}$  (就是点  $z'$  到  $A$  的距离和点  $z$  到  $A$  的距离的比) 等于  $c$ . 这样的变换, 在几何学上叫做位似变换, 点  $z'$  和  $z$  叫做位似点, 点  $A$  叫做位似中心, 数  $c$  叫做位似系数.

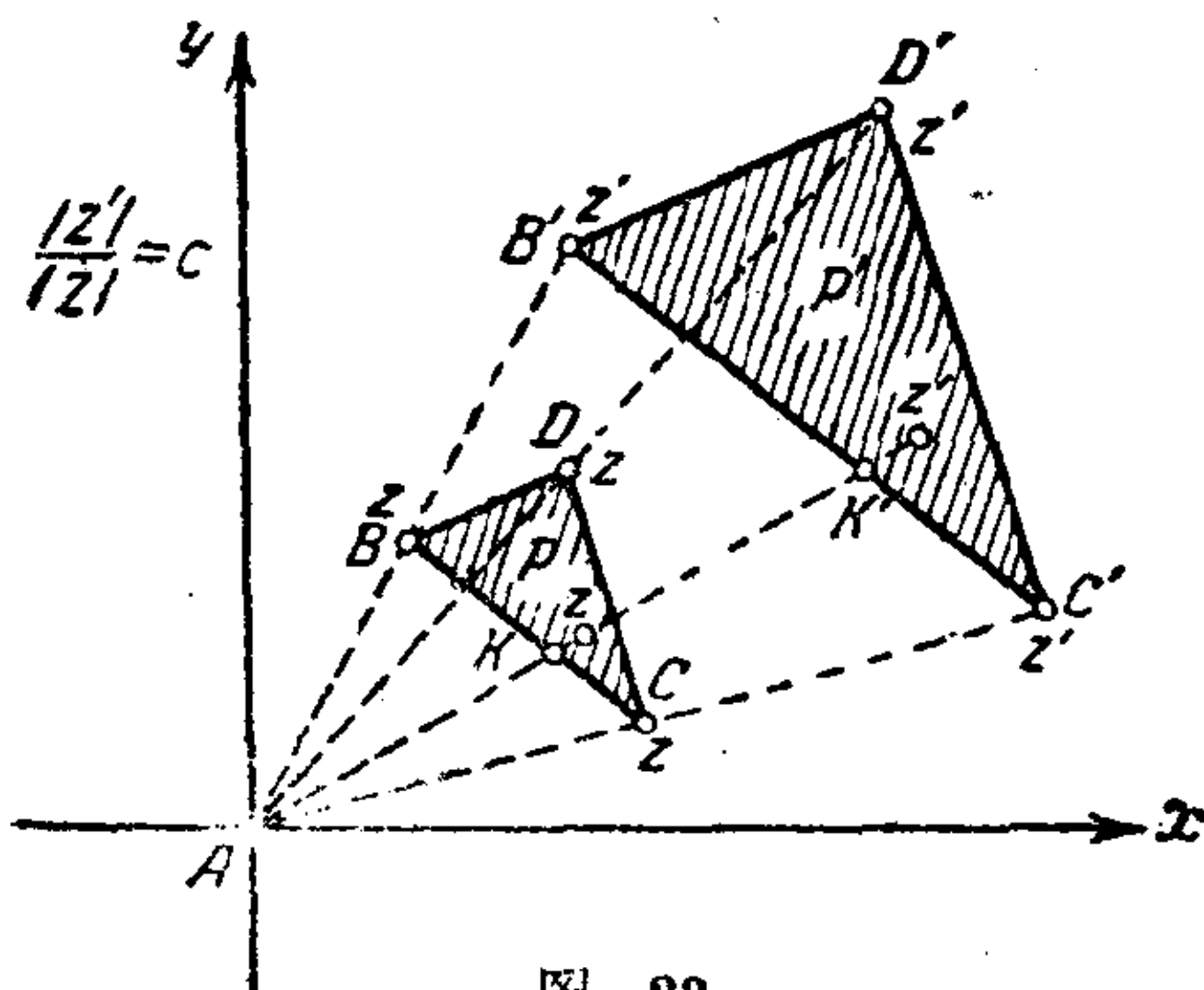


图 23.

位似变换的结果, 把图形  $P$  上一切点的总集变换到组成图形  $P'$  的某些新的点的总集 (图 23). 这个新的图形叫作已知图形  $P$  的位似图形. 容易看出, 当  $P$  是一个多边形 (例如三角形) 时, 位似

图形  $P'$  也是一个多边形, 并且和原来的多边形  $P$  相似. 要証明这一事实, 只要看图 23 上多边形  $P$  的一边  $BC$  上的点在位似变换时变到什么地方就行了.

如果点  $B$  变换到点  $B'$ , 点  $C$  到点  $C'$ , 那末把  $B'$  和  $C'$  用綫段联結起来以后, 我們就知道, 三角形  $ABC$  和  $A'B'C'$  是相似的 (角  $A$  公有, 而且夾角  $A$  的边相互成比例:  $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = c$ ). 从这里就有边  $B'C'$  平行于  $BC$ , 而且  $\frac{B'C'}{BC} = c$ . 設  $K$  是边  $BC$  上的一点; 那末射綫  $AK$  和  $B'C'$  相交于某一点  $K'$ , 三角形  $AKC$  和三角形  $AK'C'$  也相似, 于是就知  $\frac{AK'}{AK} = \frac{AC'}{AC} = c$ . 因此点  $K'$  是点  $K$  的位似点 (位似中心是  $A$ , 位似系数等于  $c$ ). 于是可以断言: 在边  $BC$  上的一切点, 經過位似变换, 都变换到了在边  $B'C'$  上的点; 这样一来, 边  $B'C'$  上的每一个点就会是边  $BC$  上的某一个点的位似点. 由此可見, 整个綫段  $B'C'$  是綫段  $BC$  的位似綫段. 同样的推理应用到多边形  $P$  的所有的边上, 便可以知道, 所有的边都变换到了新的多边形  $P'$  的边, 而且对应边兩兩平行, 兩对应边長的比等于同一个数  $c$ :

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'B'}{DB} = c.$$

这样就証明了位似图形  $P$  和  $P'$  是相似的.

因此, 用公式  $z' = cz$  ( $c$  是正的实数) 不但能够变换一个点, 而且能够变换整个的图形  $P$ . 这个变换是位似变换, 它的位似中心是  $A$ , 位似系数等于  $c$ . 如果  $P$  是一个多边形, 那末变换到的图形  $P'$  也是多边形, 而且和  $P$  相似.

19. 現在, 我們假定公式  $z' = cz$  里的数  $c$  不是正的. 首

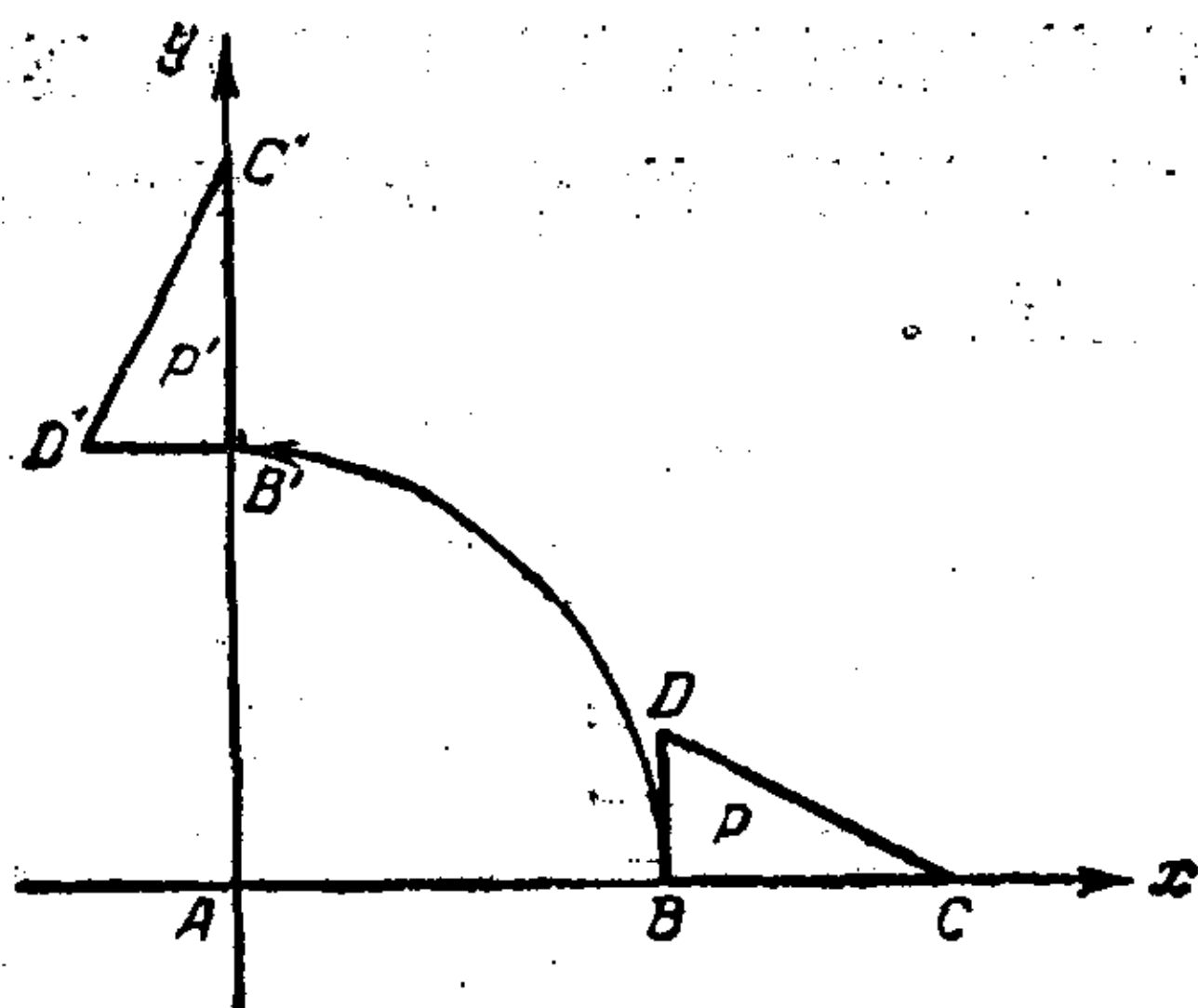


图 24.

先, 設  $|c|=1$ . 在这种場合, 乘法运算就变成了把向量  $Az$  繞点  $A$  旋轉一个等于  $c$  的幅角的角. 如果把把这个运算应用到图形  $P$  的每一个点  $z$  上, 那末結果就是把图形  $P$  繞点  $A$  旋轉  $\text{Arg } c$

的角. 因此, 用公式  $z' = cz$ , 其中  $|c|=1$ , 会使任何图形  $P$  变到图形  $P'$ ,  $P'$  是由图形  $P$  繞点  $A$  旋轉  $\text{Arg } c$  的角得到的. 例如, 取  $c=i$ ; 因为  $\text{Arg } i = 90^\circ$ , 于是  $z' = iz$  就是把图形繞点  $A$  旋轉  $90^\circ$ . 图 24 表示的就是經過这个变换的一个三角形.

如果在公式  $z' = cz$  里, 不加条件  $|c|=1$ , 而只認為  $c$  是一个复数 (不是正数也不是零), 那末图形  $P$  的相应变换可以分作兩步来进行. 首先把它伸長  $|c|$  倍, 結果就是把图形  $P$  变换到位于图形  $P_1$ , 然后再把  $P_1$  繞点  $A$  旋轉  $\text{Arg } c$ .

图 25 表示的就是經過  $z' = \frac{i}{2}z$  ( $|\frac{i}{2}| = \frac{1}{2}$ ,  $\text{Arg } \frac{i}{2} = 90^\circ$ ) 变换后的三角形  $P$ .

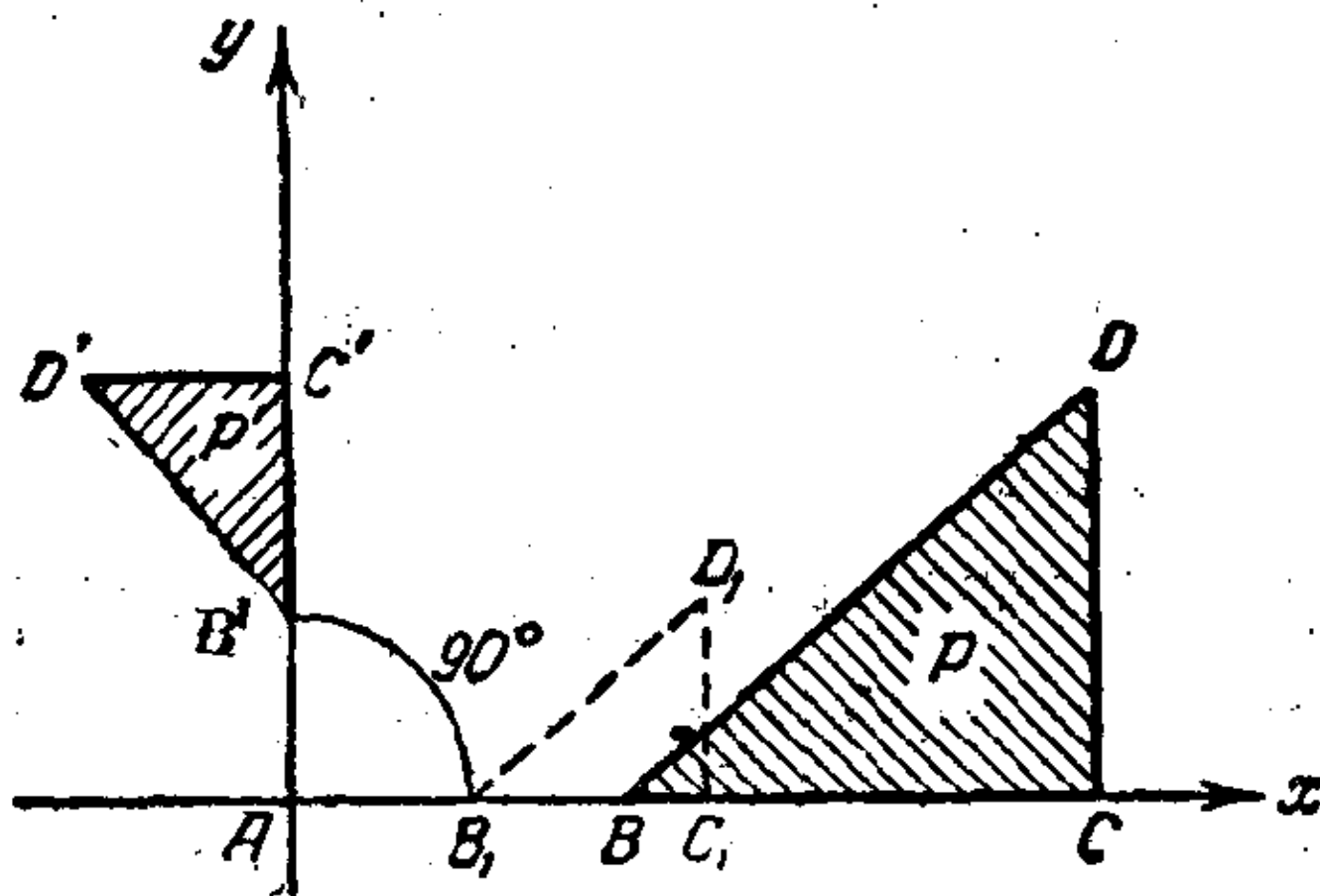


图 25.

20. 在公式  $z' = z + a$  和  $z' = cz$  里, 我們可以把  $z$  看作自变数, 把  $z'$  看作函数. 这就是最簡單的复变数  $z$  的函数. 对于  $z$  用任何一个复数常数进行加法、減法、乘法、除法以及乘幂(可以看作是乘法的重复), 我們就可以得到  $z$  的其他不同函数, 例如:

$$z' = \frac{1}{z}, \text{ 或 } z' = z^2 + cz + d, \text{ 或 } z' = \frac{z-a}{z-b} \text{ 等等.}$$

所有这样的复变函数, 都叫做有理函数; 因为这样的函数是靠运用所謂有理运算(加, 減, 乘, 除)得来的. 有理函数并不能包括所有的复变函数; 例如, 也可以确定并且研究如下形式的函数:  $z' = \sqrt[n]{z}$ ,  $z' = a^z$ ,  $z' = \sin z$  等等. 但是在这本書里, 我們只限于談有理函数, 而且是最簡單的有理函数.

21. 我們已經看到, 函数  $z' = z + a$  或  $z' = cz$  都相应于平面上图形的一定的几何变换. 这也就是说, 如果变数  $z$  跑过图形  $P$  上的点, 函数  $z' = z + a$  就跑过图形  $P'$  上的点, 图形  $P'$  是从  $P$  移动向量  $a$  得来的; 函数  $z' = cz$  就跑过图形  $P''$  上的点, 图形  $P''$  是从  $P$  作系数等于  $|c|$  的位似变换、再繞点  $A$  旋轉  $\text{Arg } c$  得来的. 因此可以說: 函数  $z' = z + a$  产生移动变换, 而函数  $z' = cz$  产生位似变换和旋转变换(如果  $c$  是正的实数, 那末作的是一个位似变换; 如果  $|c| = 1$  而  $c \neq 1$ , 那末作的是一个旋转变换). 現在就发生了这样的問題: 关于其他的复变函数特別是有理函数产生的变换可以說些什么呢? 这个問題將在本書的后面加以討論. 为了使讀者明确做这工作并不是无聊的, 我們就在这里先告訴讀者, 由有理复变函数产生的变换, 是多种多样而且富于几何性質的, 同时却具有某种普



遍的性質。這就是說，雖然經過這種變換，圖形的形狀和大小一般說來是改變了，但是所考慮的圖形的任何兩條綫間的夾角大小不變<sup>①</sup>。

當函數是  $z' = z + a$  或  $z' = cz$  這兩個特殊情況時，在變換得的圖形里，角的不變性是直接由於我們討論的是移動變換、位似變換或旋轉變換的緣故。很有趣，這種現象也發生在任何有理變函數所產生的變換中，並且也產生在其他的更普遍而複雜的變函數所謂解析函數中。但是關於解析函數，這本小冊子是不可能討論了。

22. 在幾何變換中，在變換得的圖形里任何兩條綫之間的夾角大小不變時，這種變換就叫做保角變換，有時也叫做保角映象。

上面討論的位似變換和旋轉變換，都是保角映象的例子。下面我們再來舉一個別的例子。現在還要說明，保角映象的定義要求的就是：在研究的圖形里，任何兩條綫之間的夾角是保持不變的。我們來討論緊靠在軸  $Ax$  和  $Ay$  上的正方形  $ABOD$

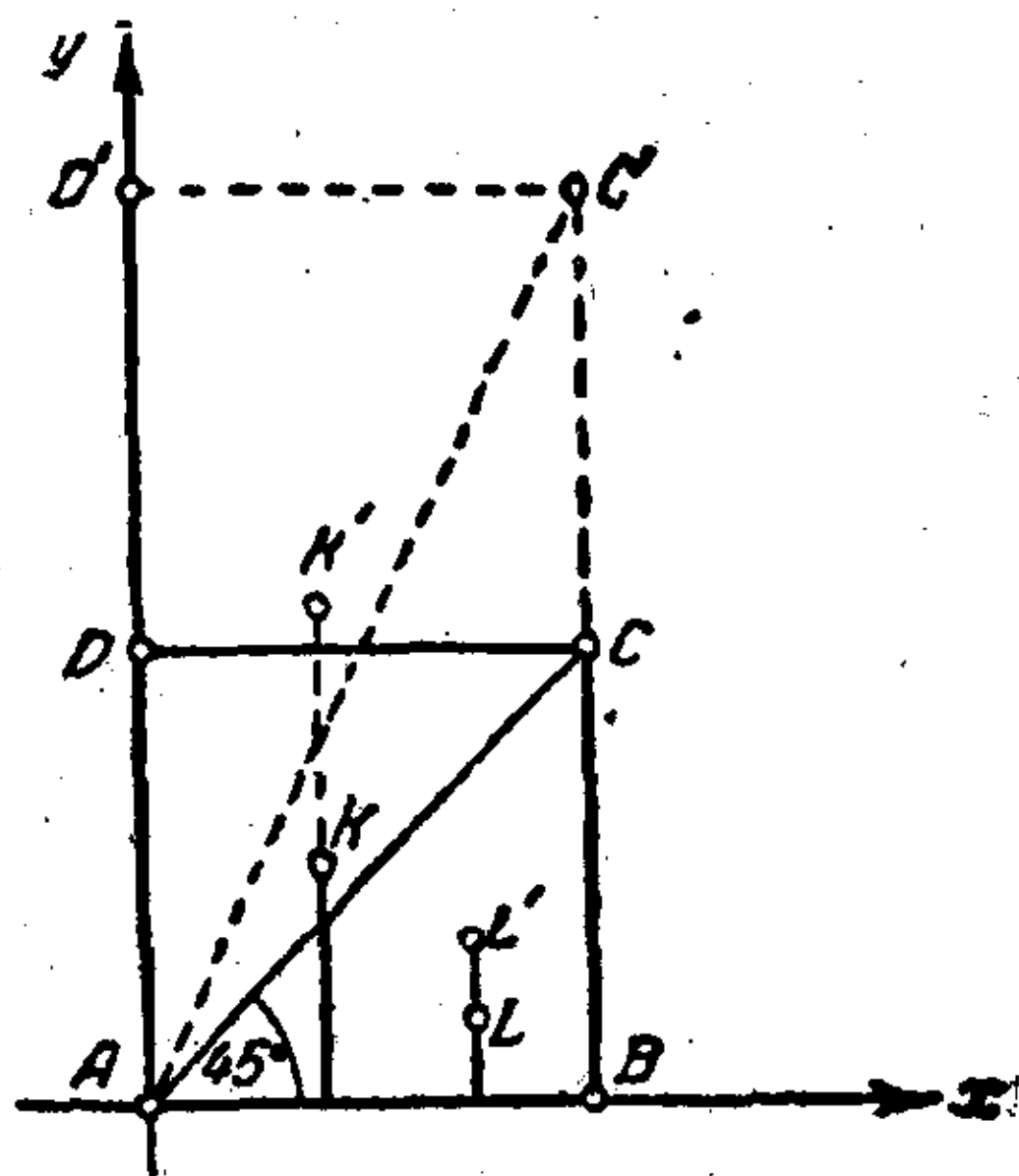


圖 26.

<sup>①</sup> 嚴格說來，在這裡可能有個別的点，以這些点作頂点的角是改變了，增加到二倍、三倍或一般說來增加到整數倍。但是，這樣的点只是這個一般規則的例外。



(图 26)。現在把它变换一下,使在变换得的图形上各点的横坐标  $x$  不变,纵坐标  $y$  加倍。例如,点  $K$  变换到  $K'$ ,点  $L$  变换到  $L'$ 。如果我们把正方形上所有的点都这样变换一下,那末正方形  $ABCD$  显然就变到了长方形  $ABC'D'$ ,这个长方形和原来的正方形有公共底边,但是高等于原来的两倍。这时候,边  $AB$  变换到它本身( $AB$  上的一切点都保持原位,因为这些点的纵坐标是零,零的两倍还是零), $AD$  变换到  $AD'$ , $DC$  变换到  $D'C'$ , $BC$  变换到  $BC'$ 。当然,两边的夹角,原来它们是直角,因此仍保持直角,这也就是说,角保持不变。但是,我们考察正方形的边  $AB$  和对角线  $AC$  的夹角  $BAC$ (图26);这个角等于  $45^\circ$ 。变换的结果, $AB$  保持原位,但是直线  $AC$  却变到了直线  $AC'$ (为什么? )。因此,角  $BAC$  变到了另外一个(大一些的)角  $BAC'$ ,这也就是说,角并不是保持不变的。如果我们不考察角  $BAC$ ,而考察以正方形  $ABCD$  里任意一点

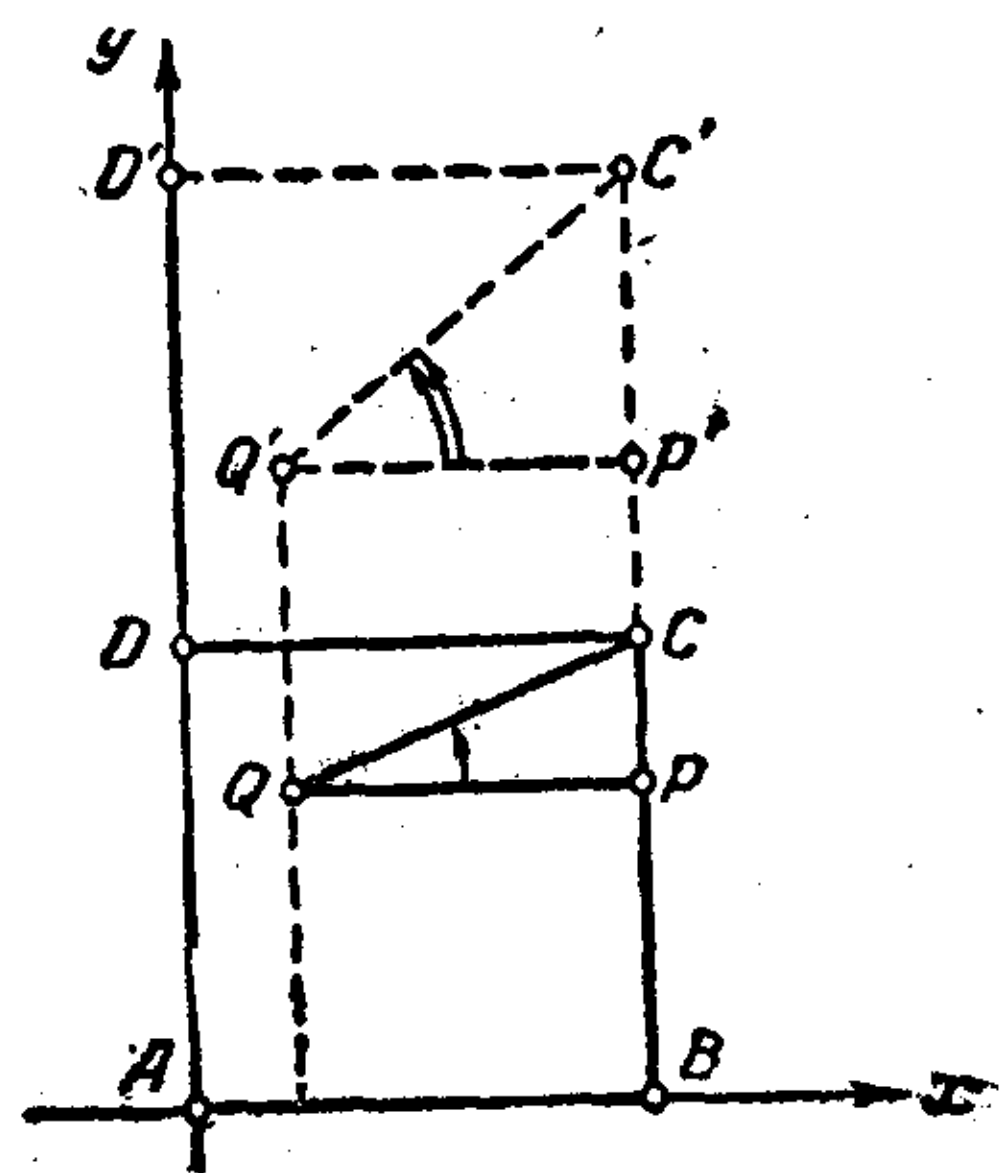


图 27.

$Q$  为顶点的角  $PQC$  (图 27),那末也很容易证明,经过这种变换,这个角是改变了。

从这里可以得出以下的结论:虽然四边形  $ABCD$  本身的四个角经过这种变换后没有改变(它们仍保持直角),但是这种变换并不是保角变换,因为在  $ABCD$  里面任何一点上作以

这个点为顶的角,这些角在变换后是改变(增大)了。

23. 为了往下讨论,我们首先需要使读者明了,两条曲线  $QR$  和  $QP$  相交于点  $Q$  时(图 28),对这两条曲线的夹角应该怎样来了解。

在曲线  $QP$  上取点  $Q$  以外的任意一点  $Q_1$ ,引弦  $QQ_1$ 。同

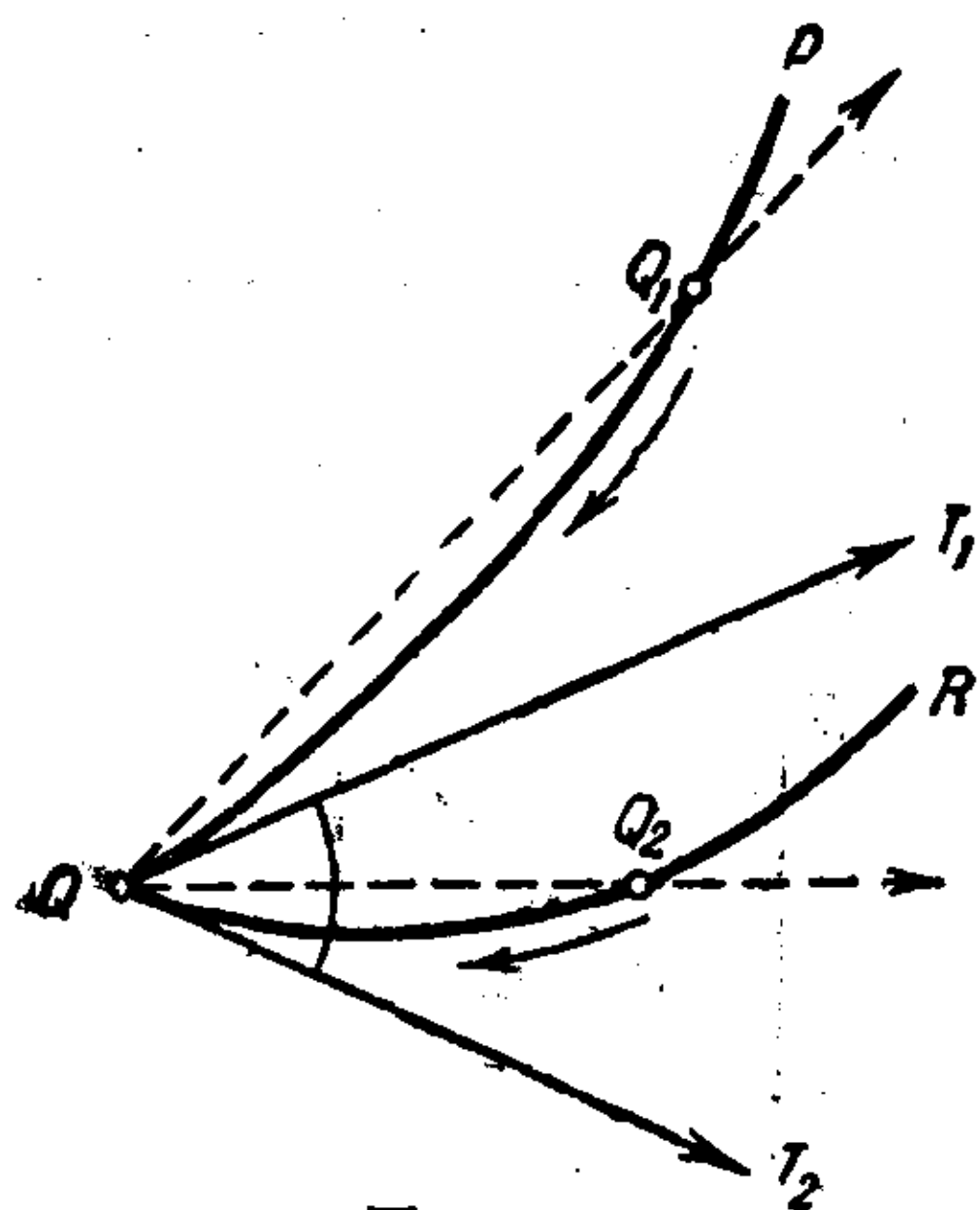


图 28.

样地,在曲线  $QR$  上取点  $Q$  以外的任意一点  $Q_2$ ,引弦  $QQ_2$ . 角  $Q_1QQ_2$  的值可以看作是曲线角  $PQR$  的值的渐近值. 当点  $Q_1$  和  $Q_2$  越接近点  $Q$  时,弦就越逼近曲线  $QP$  和  $QR$  在点  $Q$  附近的一段. 因此角  $Q_1QQ_2$  可以看作是跟这两条曲线间夹角的值越来越接近的渐近值. 如果点  $Q_1$  沿曲线  $QP$  移动,点  $Q_2$  沿

曲线  $QR$  移动,并且都无限接近点  $Q$ ,那末弦  $QQ_1$  和  $QQ_2$  就会绕着点  $Q$  转动,逐渐趋近极限位置  $QT_1$  和  $QT_2$ . 射线  $QT_1$  和  $QT_2$ , 比从点  $Q$  所作的其他射线,更逼近在点  $Q$  附近的两条曲线. 这两条直线叫做曲线  $QP$  和  $QR$  的切线,它们的夹角  $T_1QT_2$  就是曲线  $QP$  和  $QR$  在  $Q$  点的夹角. 因此,两曲线相交于某一点,所谓两曲线的夹角,就是在交点作出的两曲线的切线的夹角.

这个定义也可以应用于一条曲线  $QP$  和一条直线  $QR$  相交于一点  $Q$  所形成的角(图 29). 设  $QT_1$  是  $QP$  在点  $Q$  的切

綫。为了引用定义,应该把直綫  $QR$  换成这直綫的切綫。但是很容易知道,直綫  $QR$  的切綫就是直綫本身。事实上,为了引一弦,应该在  $QR$  上取点  $Q$  以外的任意一

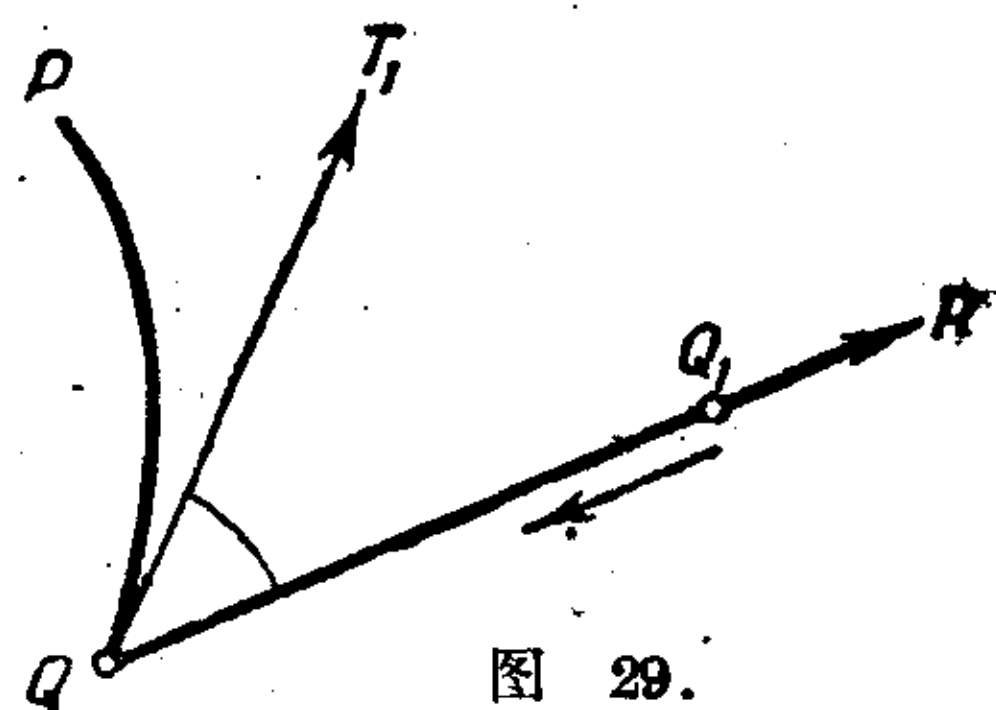


图 29.

点  $Q_1$ , 然后联起  $Q$  和  $Q_1$ 。显然, 这条联綫仍旧是  $QR$ 。如果  $Q_1$  逐渐接近  $Q$ , 上述的弦却保持不变。因为切綫是弦的极限位置, 所以切綫仍然是直綫  $QR$ 。因此, 应该把曲綫  $QP$  和直綫  $QR$  間的夾角了解作曲綫  $QP$  在  $Q$  点的切綫  $QT_1$  和原直綫  $QR$  間的夾角。可能有这样的情形, 直綫  $QR$  就是曲綫  $QP$  的切綫 (也就是  $QR$  和  $QT_1$  重合); 这时候  $QR$  和  $QP$  的夾角就变成了零。于是, 曲綫和从点  $Q$  所作的切綫間的夾角等于零。

24. 保角映象有很多用处。例如, 在地图的制图学中就要用到它。

每一幅地图, 都是把地球表面的一部分描繪到平面上 (一張紙上)。描繪时, 大陆和海洋的輪廓多多少少要受到歪曲。讀者容易相信, 如果不允許有伸長和縮短、不允許有破裂和褶紋, 那末就不可能把一块块的球面 (例如乒乓球的破壳) 压放在一个平面上。由于同样的緣故, 不允許改变比例因而也不允許改变形狀, 就不可能把地球表面 (以后可以把它看作球面) 描繪在平面上, 这也就是说, 不可能制成地图。但是, 可以这样来制地图, 就是使地球表面上的任何兩直綫間的夾角大小不变。

假使要制一幅北半球的地图，在这幅地图上，地球表面任何兩方向間的夾角大小都要画得和原来一样。为了表現得显明，我們可以这样作：設想地球是任何透明材料，比如說是玻璃形成的，除了北半球的大陆的周界、国家和海洋的周界以及經緯綫以外，其他地方都涂上一层不透明的顏料。此外，可以把以北半球上任何一点作頂的任意角  $PQR$  的边（曲綫）保留，不涂不透明的顏料。如果在地球的南极放一个又小又亮的电灯，而在

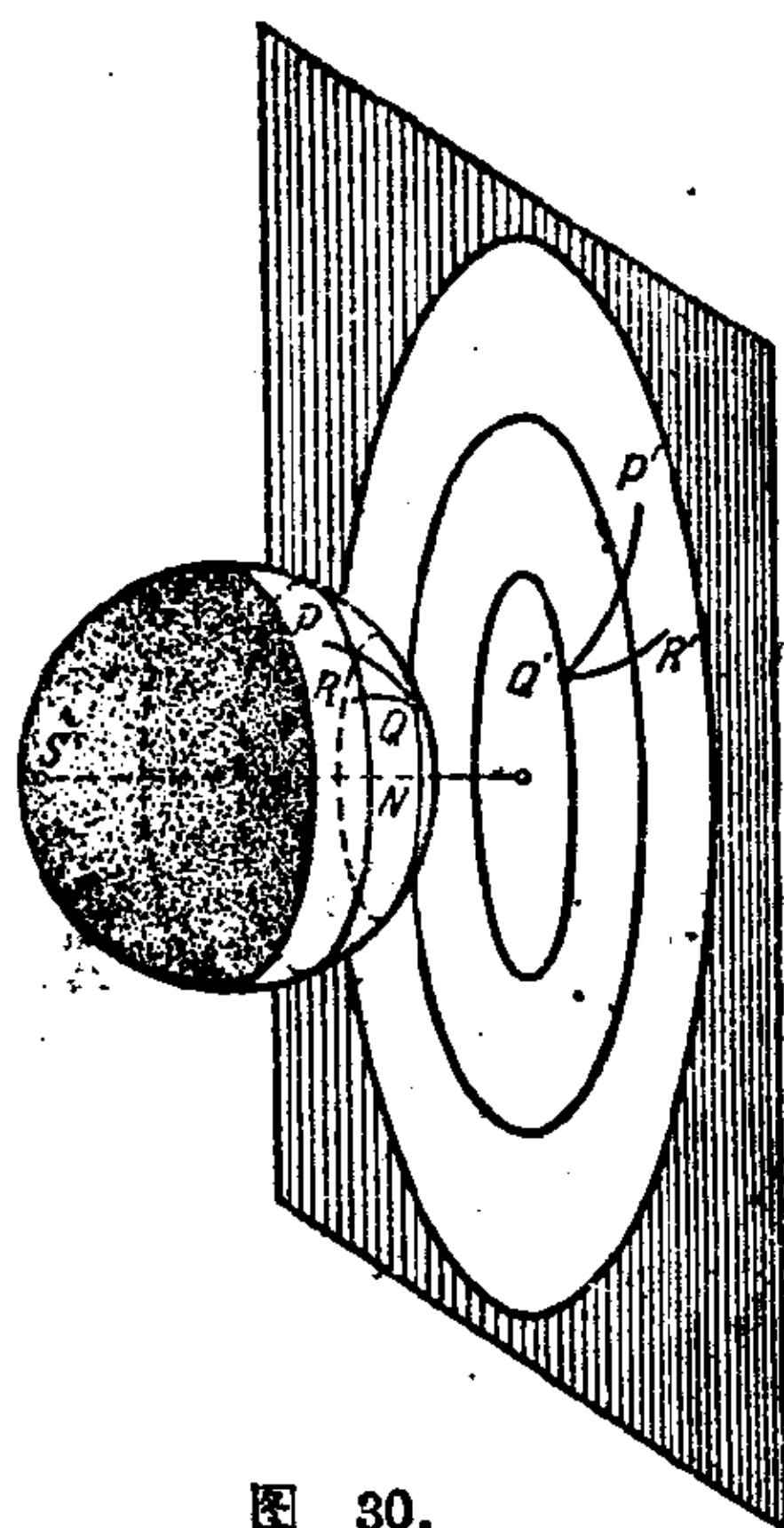


图 30.

地球的前面和地軸垂直的方向放一幅銀幕，那末在一間黑屋子里，我們就可以在銀幕上看到北半球的地界图（图 30）。可以用几何方法証明，在这样的地图（叫作极射赤面投影图）上，北半球上任何兩条綫間的夾角大小都表示得和原来一样。特别是角  $PQR$  表示得也和原来一样大。

25. 上面我們敘述了怎样才可以画成一幅所有的角都保持原来数值的北半球地图。如果不把发射光綫的光源（电灯）放在南极，而放在北极，那末就可以用同样的方法得到南半球的地图，并且使南半球上所有的角都保持原来的数值。用上述方法得到的每一幅地图，都是平面图；如果再把这平面图作一次保角映象，它就变換成一幅新的图，这幅新图仍旧可以看

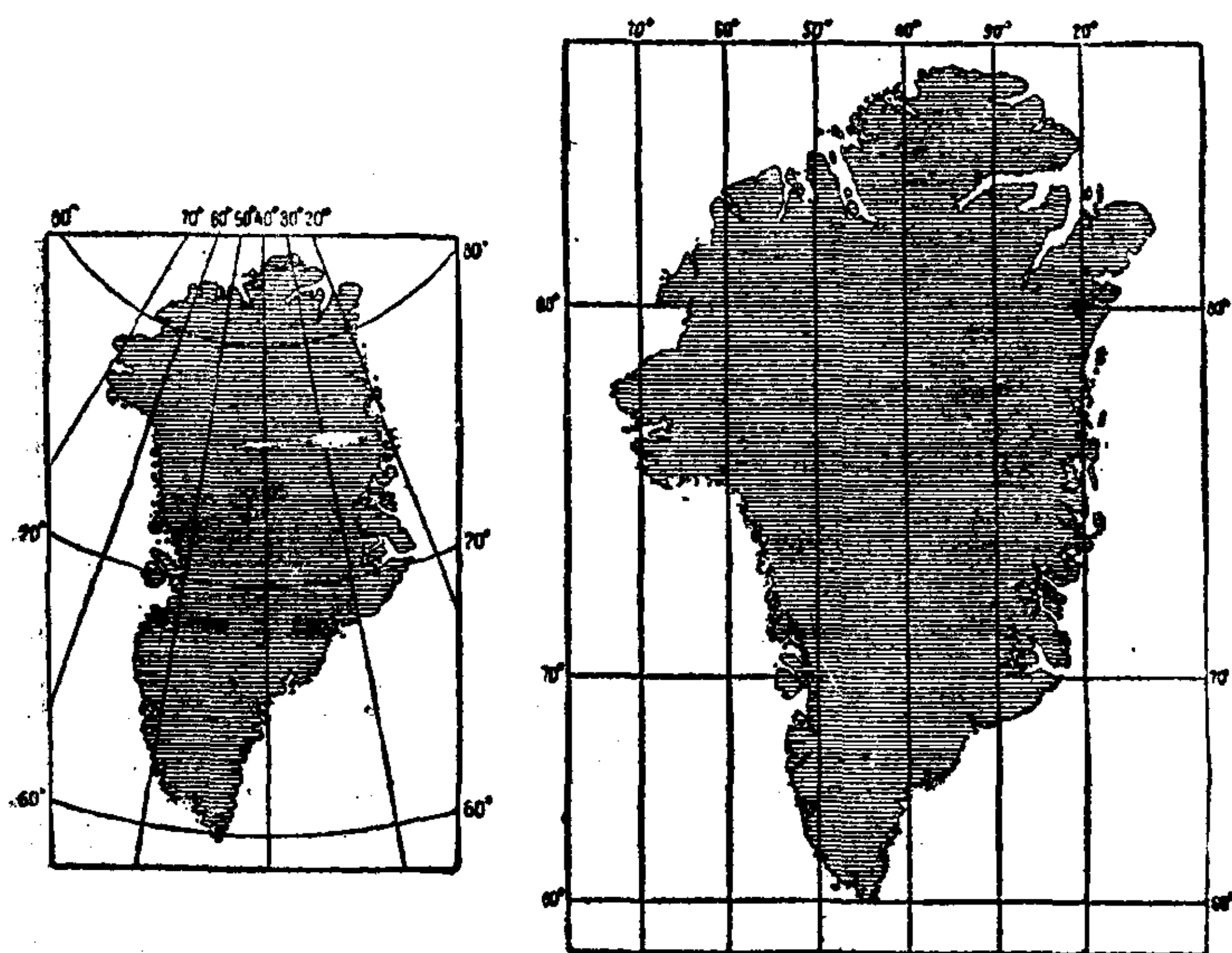


图 31.

作是一幅地图。因为经过保角映象后角是不变的,所以在新的地图上地球表面任何两方向间的夹角仍保持原来数值。图31左边的地图是格林蘭的极射赤面投影图,右边的是把左边图上每一个点经过下列变换公式而得到的:

$$z' = \log_e |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

这里作对数的底数的就是所谓纳氏数  $e=2.71828 \dots$ , 而  $\operatorname{Arg} z$  不是用度数来计算而是用弧度来计算的。

毫无疑问,这个公式,一看就知道是很复杂的、特地造作的。在这里我们不可能详细地去研究它,也不可能去验证由这个公式产生的变换的确是保角变换。我们只能说,用这样的公式来绘制成地图,大约是四百年前荷兰学者麦卡托首



創的。直到現在，這種地圖在航海中仍舊廣泛地流行着。這種地圖比極射赤面投影圖好的地方就在：圖上不但經綫是直綫，而且緯綫也是直綫；還有，地球表面上的任何路綫，凡是順着走時羅盤指針方向保持不變的路綫（所謂斜航綫），在圖上也被畫成了直綫。

26. 保角映象最重要的應用，是在物理學和力學問題方面。在許多問題里，例如討論到一個帶電的電容器周圍空間中一點的電位，或者討論到一個加熱物體周圍的溫度，討論到液體或氣體在某一個渠道內繞流過一個障礙物時液流或氣流里微粒的速度，都需要會計算電位、溫度和速度等等。如果碰到問題里的物體形狀特別簡單（例如成平板狀或圓柱狀），解答這類問題就沒有多大困難。但是還有很多其他情況，也需要會做這種計算。例如，在製造飛機的時候，必須會計算機翼周圍氣流里空氣微粒的速度<sup>①</sup>。

機翼的橫斷面（翼型）如圖 32a 所示。其實，當被繞流過

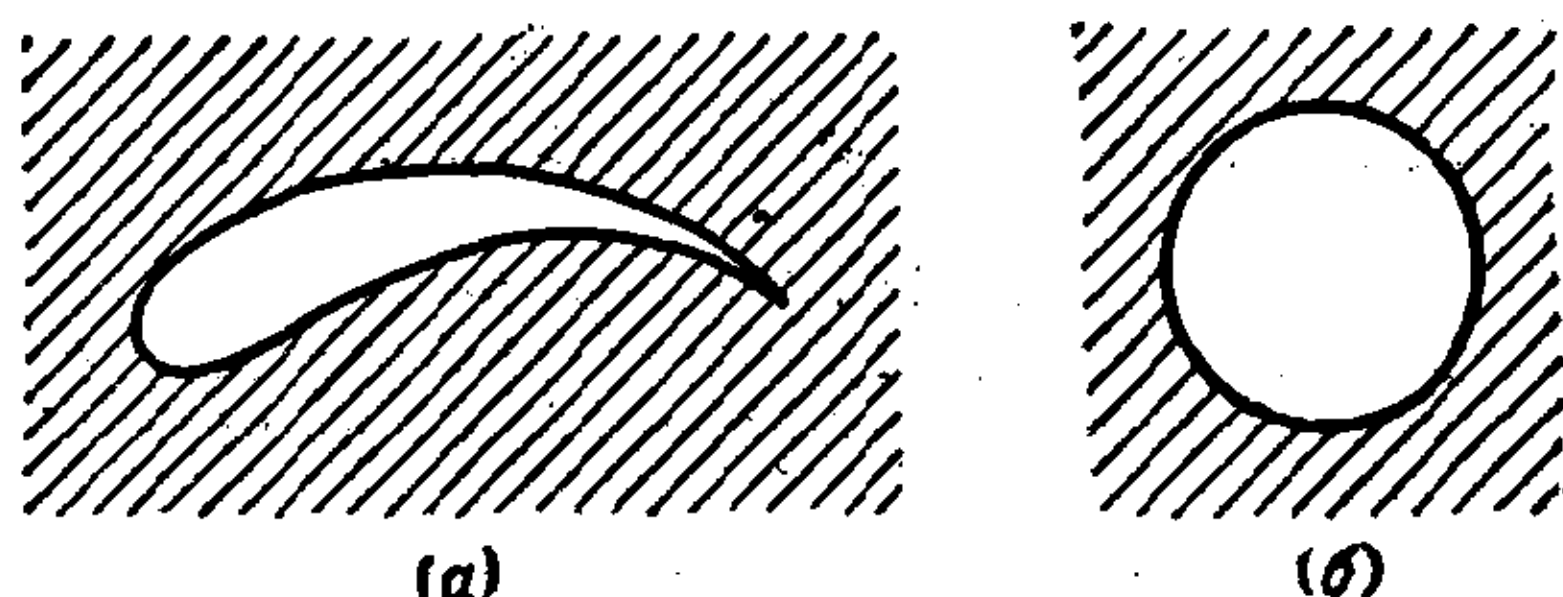


圖 32.

<sup>①</sup> 飛機飛行時，空氣微粒和機翼當然都在運動。但是，根據力學的定律，可以作為這樣的情形來研究：假設機翼不動，空氣却在機翼周圍繞流而過。



的物体的横断面图是一个圆时(就是说,物体本身是一个圆柱时)(图 326),计算速度就特别简单。

由此可见,为了把绕流过机翼的空气流的速度问题变换成简单的绕流过圆柱的问题,只要用保角映象把图 32a 的图形(翼型的外周)变换到图 326 的图形(圆的外周)就行了。这种样子的映象,可以用一定的复变函数来实现。知道了这个函数,就可以把绕流过圆柱的气流的速度换算到绕流过机翼的气流的速度,因此,提出来的问题就完全解决了。

同样地,用保角映象可以把任何形状(任何横断面)的物体的研究里有关计算电位和温度的问题变换成最简单的情形来解决。然后用那个实现保角映象的复变函数,把结果反过来换算到原来的带电(或带热)的物体的周围空间去。

27. 上面讲到的关于保角映象在制图、力学和物理学问题上的应用,我们没有作出证明。在这本书里,我们不可能作证明,因为要了解它们,读者就必须具有在高等学校里才能讲授的知识。

从这里直到本书的末了,我们要讨论最简单的有理函数,用这些函数可以实现某一些保角映象。我们要谈到的函数就是:(1)  $z' = \frac{z-a}{z-b}$  (所谓线性分式函数); (2)  $z' = z^2$ ; (3)  $z' = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$ 。最后一个函数是以著名的俄罗斯学者尼古拉·叶果罗维奇·儒科夫斯基(1847-1921)来命名的,列宁很公正地把他称为“俄罗斯航空之父”。这个函数叫做儒科夫斯基函数,因为儒科夫斯基很成功地应用它来解决了一些飞机的理论问题;特别是他说明了,利用这个函数可以得到某些具有理



尼古拉·叶果罗维奇·儒科夫斯基

(1847-1921)

他在飞机的计算里,广泛地应用了复数和保角映象

論和实用价值的飞机翼型图。

关于这个儒科夫斯基函数的应用,我們下面还要講到。

28. 先从綫性分式函数  $z' = \frac{z-a}{z-b}$  講起。在这里,  $a$  和  $b$  是两个不相等的复数。我們来証明: 用这个函数, 可以把每一个經過点  $a$  和  $b$  的圆弧  $PLQ$  变换到由坐标原点发射出来的某一射綫  $P'L'$ , 并且这一射綫和正实軸的夾角等于方向  $baN$  和圆弧在点  $a$  的切綫的夾角(图 33)。

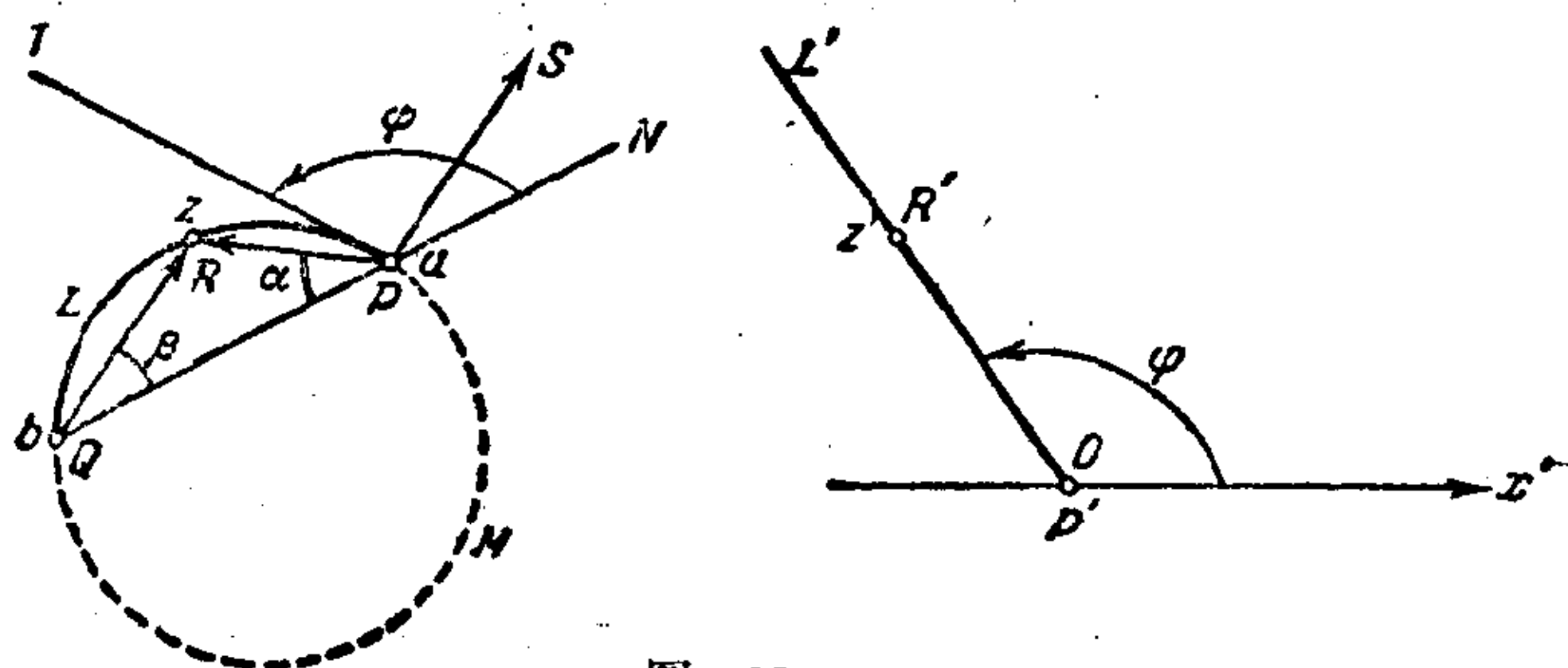


图 33.

設点  $z$  在弧  $PLQ$  上(图 33 左方), 讓我們証明, 它的象(也就是和它对应的点  $z' = \frac{z-a}{z-b}$ )一定在射綫  $P'L'$  上(图 33 右方). 要作出向量  $z'$ , 必須知道这个向量的長 ( $|z'|$ ) 和这个向量对正实軸的傾斜角 ( $\text{Arg } z'$ ). 但是,  $z'$  是两个复数  $z-a$  和  $z-b$  的商, 而表示  $z-a$  和  $z-b$  的是向量  $PR$  和  $QR$ . 于是  $|z'| = \frac{|z-a|}{|z-b|}$ , 而  $\text{Arg } z'$  等于角  $SPR$  (向量  $PS$  和向量  $QR$  等長而且方向相同, 計算方向是从  $PS$  到  $PR$ ). 显然,  $\widehat{SPR} = \widehat{QRP}$ <sup>①</sup>, 因而它等于圆弧  $QMP$  的一半. 而角  $NPT$  也等于圆弧  $QMP$  的

① 記号  $\widehat{ABC}$  表示角  $ABC$ .

一半。于是  $\text{Arg } z' = \widehat{SPR} = \widehat{QRP} = \widehat{NPT} = \varphi$ 。由此可知，在圆弧  $PLQ$  上任何地方的点  $z$ ，它的象点  $z' = \frac{z-a}{z-b}$  都具有相同的幅角  $\varphi$ 。这就是说，圆弧上所有的点的象都在和正实轴成倾斜角  $\varphi$  的一条射线  $P'L'$  上。

如果  $PLQ$  不是一个圆弧、而是一段直线  $PQ$ ，这个结论仍然是对的。这时候，应该把角  $\varphi$  看成等于  $180^\circ$ ，射线  $P'L'$  和负实轴相重合（图 34）。事实上，如果  $z$  是线段  $QP$  上的一点，那末表示  $z-a$  和  $z-b$  的两个向量的方向刚好是相反的。因此知道，商  $z' = \frac{z-a}{z-b}$  是负的实数，也就是说  $z'$  在负实轴上。

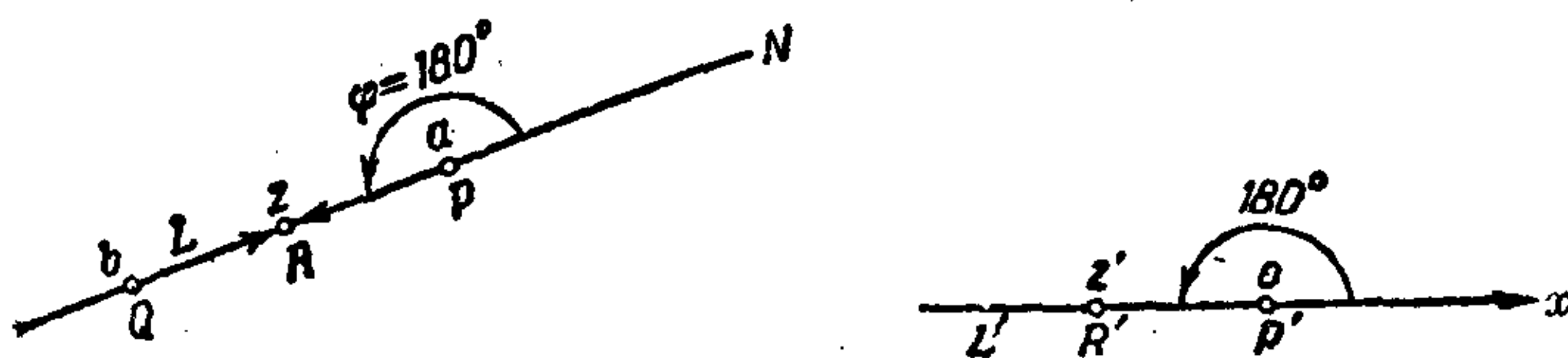


图 34.

我們已經証明了，圆弧  $PLQ$  的所有的象点都在射线  $P'L'$  上。但是，这些象点是占满整段射线  $P'L'$  呢，还是在  $P'L'$  上有不是圆弧  $PLQ$  上任何一点的象点呢？现在讓我們来証明：象点是占满整段射线的。

先来看看点  $P'$ （原点）；这个点是点  $P$  的象点，因为当  $z = a$  时， $z' = \frac{z-a}{z-b}$  变成零。在射线  $P'L'$  上任取一点  $z'$ （图 35），但不取  $P'$ （也就是  $z' \neq 0$ ）。显然  $z'$  不可能是正的实数，因为射线  $P'L'$  不和正实轴重合。

把  $z$  看作未知数，从方程  $z' = \frac{z-a}{z-b}$  求解  $z$ ；便有  $z'z - z'b =$

$z-a$ , 由此得  $z = \frac{z'b-a}{z'-1}$ . 所以对于  $P'L'$  上的每一个点  $z'$ , 可以找到唯一的一个值  $z$ , 使  $z' = \frac{z-a}{z-b}$ , 这也就是说  $z'$  是  $z$  的象点. 但是点  $z$  的位置在哪里呢? 是不是可能  $z$  不在弧  $PLQ$  上? 我們說, 这是不可能的. 首先, 点  $z$  不可能在綫段  $PQ$  的延綫上 (就是在綫段  $PQ$  以外). 否則复数  $z-a$  和  $z-b$  就会有相等的幅角,  $z' = \frac{z-a}{z-b}$  就会是一个正数. 現在假設  $z$  不在  $PQ$  的延綫上, 經過  $P$  和  $Q$  作一个圓弧, 并且使圓弧經過  $z$  (要是  $z$  在綫段  $PQ$  上, 那就不用作圓弧而應該取綫段  $PQ$ ). 設所作的圓弧是  $PL_1Q$ ; 因为它和  $PLQ$  不重合, 所以这个圓弧在  $P$  点的切綫將和方向  $baN$  形成夾角  $\varphi_1$ , 不等于  $\varphi$  (图 35). 因此点

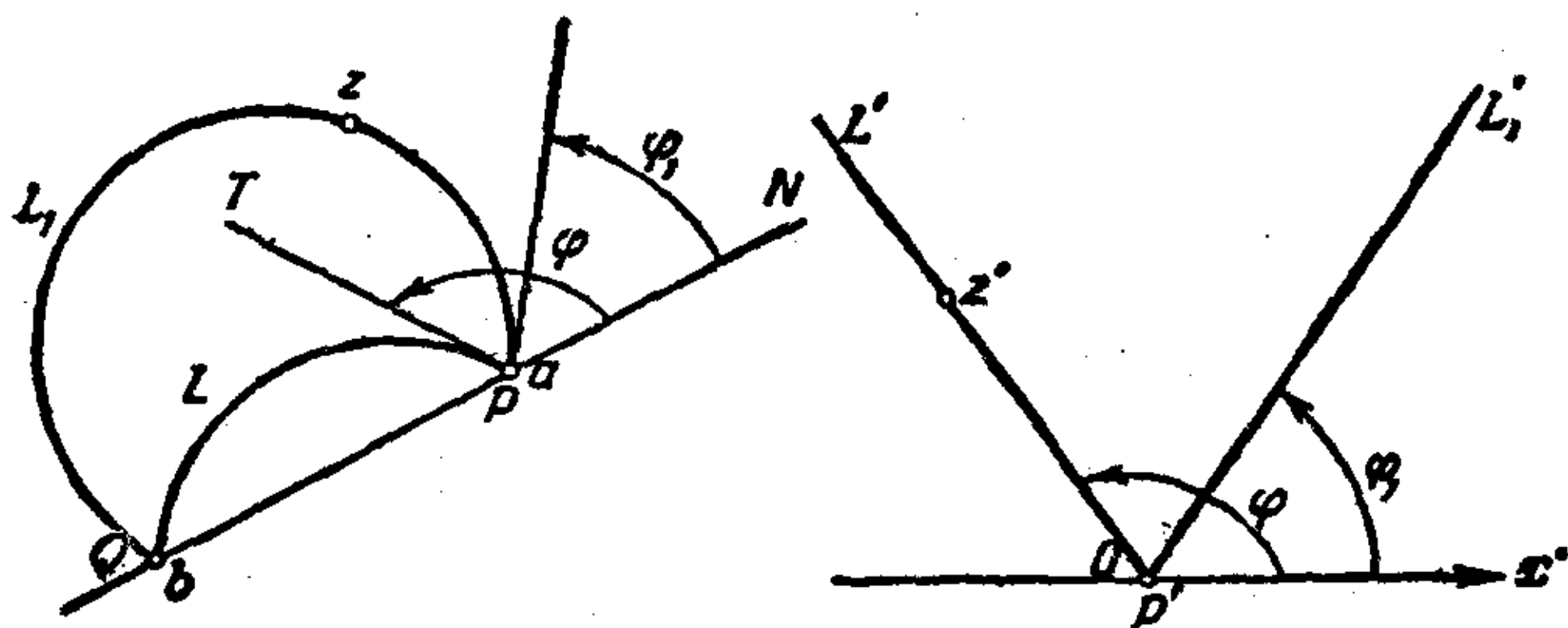


图 35.

$z$  的函数  $z' = \frac{z-a}{z-b}$  的值一定可以用射綫  $P'L_1'$  上的点来表示, 射綫  $P'L_1'$  和正实軸成傾斜角  $\varphi_1$ , 因此知道  $P'L_1'$  不和  $P'L'$  重合. 我們发现了一个矛盾, 因为得到的結論是: 除点  $P'$  以外的点  $z'$  一定在射綫  $P'L'$  上, 也在  $P'L_1'$  上. 所以我們証明了, 在  $P'L'$  上的每一个点  $z'$  只是一个点  $z$  的象 ( $z' = \frac{z-a}{z-b}$ ), 而且  $z$  在弧  $PLQ$  上. 由此可知, 如果点  $z'$  跑过了射綫  $P'L'$ , 那末从公式  $z' = \frac{z-a}{z-b}$  决定的和  $z'$  对应的点  $z$  就要跑过  $PLQ$ .



最后讓我們証明：当点  $z$  順着  $P$  到  $Q$  的方向画出圓弧  $PLQ$  时，象点  $z'$  就会順着从点  $P'$  远去的一个方向画出射綫  $P'L'$ 。为了达到这个目的，只須証明：当点  $z$  作上面規定的运动时，距离  $P'R' = |z'| = \frac{|z-a|}{|z-b|} = \frac{PR}{QR} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$  (图 33) 逐渐增大而趋向无穷。但知  $\varphi + \alpha + \beta = 180^\circ$ ，因而  $\beta = 180^\circ - (\alpha + \varphi)$ ， $\sin \beta = \sin(\alpha + \varphi) = \sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi$ ，于是

$$P'R' = |z'| = \frac{\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi}{\sin \alpha} = \cos \varphi + \sin \varphi \operatorname{ctg} \alpha.$$

当点  $z$  順着弧  $PLQ$  从  $P$  向  $Q$  运动时，角  $\alpha$  的值从  $180^\circ - \varphi$  逐渐减小到零，而角  $\varphi$  的值不变。因此， $\operatorname{ctg} \alpha$  的值是从  $-\operatorname{ctg} \varphi$  的值增加到  $+\infty$ ， $|z'| = \cos \varphi + \operatorname{ctg} \alpha \sin \varphi$  也一样会增加(因为  $\sin \varphi$  的值是正的)，并且从  $\cos \varphi - \operatorname{ctg} \varphi \sin \varphi = 0$  增加到  $+\infty$ 。

29. 我們来研究一个任意圓  $PLM$ ，它經過点  $a$  而不經過点  $b$  (图 36)。設圓在点  $a$  的切綫和  $baN$  方向形成的角等于  $\varphi$ 。作一个經過点  $a$  和点  $b$  的輔助圓，使这个圓在点  $a$  的切綫和  $baN$  方向成  $\varphi + 90^\circ$  角。这个輔助圓和原来的圓相交于某一点  $E$ ；把这个点所表示的复数記作  $c$ 。我們来証明，函数  $z' = \frac{z-a}{z-b}$  把圓  $PLM$  变成一个以綫段  $P'E'$  作直徑的圓  $P'L'M'$ ，点  $P'$  表示的是复数 0，点  $E'$  表示的是复数  $c' = \frac{c-a}{c-b}$  (图 36)。因此，圓  $P'L'M'$  在点  $P'$  的切綫和实軸正方向的交角是  $\varphi$ 。

因此，我們打算証明， $PLM$  上每一点  $z$  的对应点  $z' = \frac{z-a}{z-b}$  必定在圓  $P'L'M'$  上，并且点 0 和  $c' = \frac{c-a}{c-b}$  是圓  $P'L'M'$  的一直徑的兩端点。显然，只要証明，从每一点  $z' = \frac{z-a}{z-b}$  (設  $z$  在  $PLM$  上) 来看綫段  $P'E'$ ，所張的視角都是直角，也就是說，角



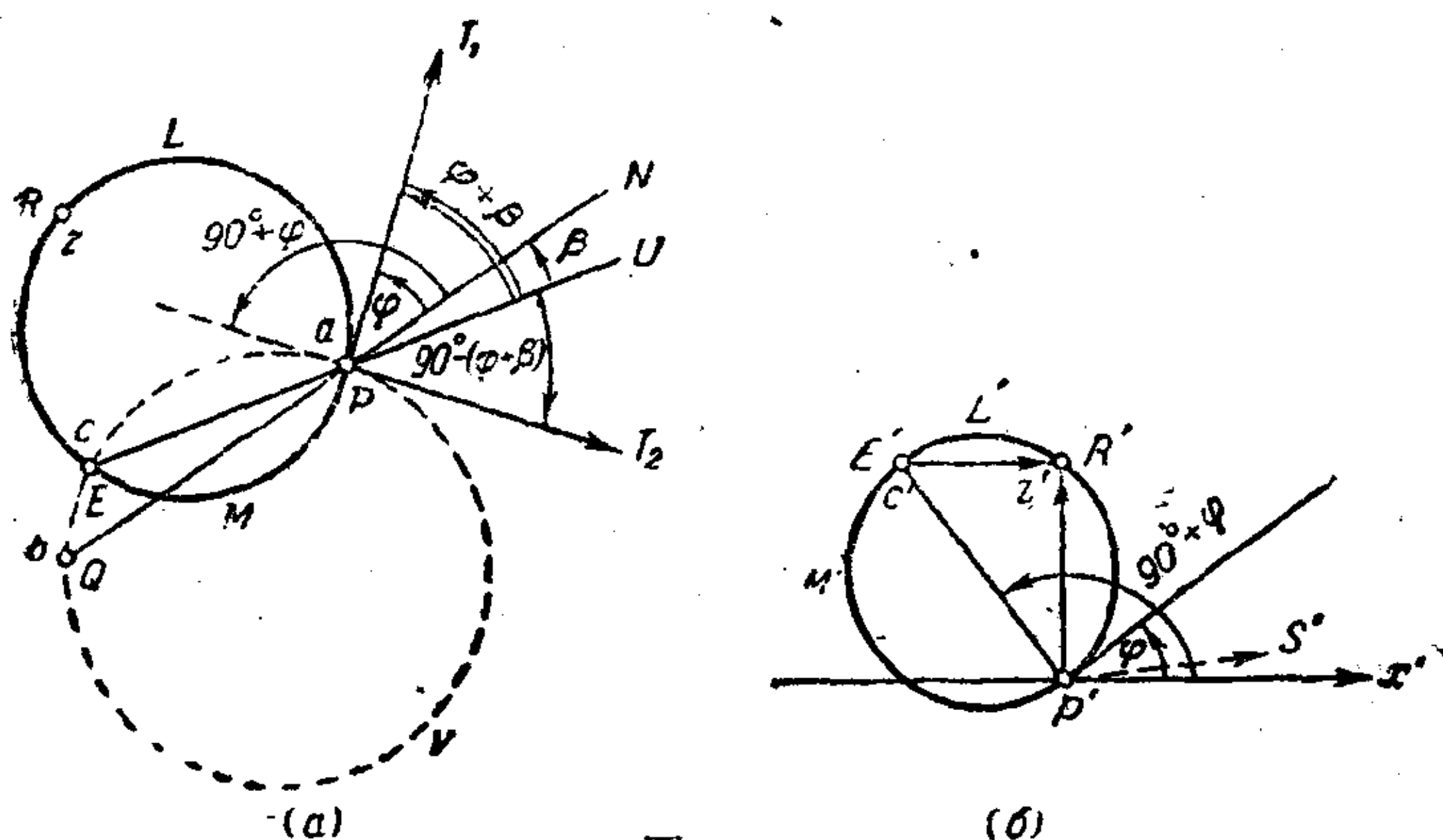


图 36.

$E'R'P'$  等于直角<sup>①</sup>。但是，角  $E'R'P'$  是表示复数  $z'-c'$  的向量  $E'R'$  和表示复数  $z'$  的向量  $P'R'$  形成的；这个角度等于角  $S'P'R'$ （向量  $P'S'$  和向量  $E'R'$  方向相同，长度相等），角  $S'P'R'$  的方向是从  $P'S'$  到  $P'R'$  的。角  $S'P'R'$  等于  $\text{Arg} \frac{z'}{z'-c'}$ ，因此，我们感兴趣的角  $P'R'E'$  也等于复数  $\frac{z'}{z'-c'}$  的幅角，也就是说， $\angle P'R'E' = \text{Arg} \frac{z'}{z'-c'}$ 。变换式子  $\frac{z'}{z'-c'}$ ，用  $\frac{z-a}{z-b}$  来代替  $z'$ ，用  $\frac{c-a}{c-b}$  来代替  $c'$ 。得到：

$$\begin{aligned} \frac{z'}{z'-c'} &= \frac{z-a}{z-b} \div \left( \frac{z-a}{z-b} - \frac{c-a}{c-b} \right) = \frac{z-a}{z-b} \div \frac{(z-c)(a-b)}{(z-b)(c-b)} \\ &= \frac{z-a}{z-c} \div \frac{b-a}{b-c} = \frac{z''}{b''}. \end{aligned}$$

在这里， $\frac{z-a}{z-c} = z''$ ， $\frac{b-a}{b-c} = b''$ 。显然， $z''$  也是  $z$  的线性分式函

<sup>①</sup> 因为，从平面上某一点来看一个线段，如果所张的视角是直角，那末这一点必在以该线段作直径的圆上。

数。这个函数  $z'' = \frac{z-a}{z-c}$  和我们原来的函数  $z' = \frac{z-a}{z-b}$  的差别，只是把点  $c$  换成了点  $b$ 。对于这个新函数，可以应用第 28 节已经获得的结果。这就是说，如果点  $z$  在联结  $a$  和  $c$  的圆弧上，那末点  $z''$  就一定在从坐标原点出发的射线上。这时候，如果圆弧在  $a$  点的切线和  $caU$  方向相交成某一角  $\alpha$ ，那末对应的射线和实轴正方向也相交成角  $\alpha$ ；换句话说，就是  $z''$  的幅角等于  $\alpha$ 。因为点  $z$  在经过点  $a$  和  $c$  的圆弧  $PLE$  上，这个圆弧的切线  $PT_1$  和  $caU$  方向的交角等于  $\beta + \varphi$  (图 36a)，所以无论  $z$  在弧  $PLE$  的什么地方，复数  $z'' = \frac{z-a}{z-c}$  的幅角都应该等于  $\beta + \varphi$ 。另一方面，点  $b$  在联结点  $a$  和  $c$  的圆弧  $PVE$  上。这个圆弧在点  $a$  的切线  $PT_2$  和  $caU$  方向的交角是  $(\beta + \varphi) - 90^\circ$  (这个角的绝对值等于  $90^\circ - (\beta + \varphi)$ ，但是从图 36a 可以看出，在我们考虑的情形，这个角的转动方向是负的，因此应该加上负号)。因此，线性分式函数  $\frac{z-a}{z-c}$  在  $z=b$  时的值，也就是复数  $b'' = \frac{b-a}{b-c}$ ，应该用射线上某一点来表示，这条射线从坐标原点射出，和实轴正方向的交角是  $(\beta + \varphi) - 90^\circ$ ，也就是说， $\text{Arg } b'' = (\beta + \varphi) - 90^\circ$ 。

回想一下，我们要求出的角是：

$$\widehat{P'R'E'} = \text{Arg } \frac{z'}{z'-c'}.$$

我们已经求出， $\frac{z'}{z'-c'} = \frac{z''}{b''}$ ，并且

$$\text{Arg } z'' = \beta + \varphi, \text{Arg } b'' = (\beta + \varphi) - 90^\circ;$$

从这里可以推出， $\text{Arg } \frac{z''}{b''} = 90^\circ$  (图 37)，以及

$$\widehat{P'R'E'} = \text{Arg } \frac{z'}{z'-c'} = \text{Arg } \frac{z''}{b''} = 90^\circ.$$

因此,从每一个点  $z' = \frac{z-a}{z-b}$  来看綫段  $P'E'$ , 所張的視角都是直角. 这就說明了, 点  $z'$  在以綫段  $P'E'$  作直徑的圓  $P'L'M'$  上<sup>①</sup>.

还必須說明, 这个圓在  $P'$  点的切綫和实軸正方向相交成角  $\varphi$ . 为了說明这一点, 只要証明, 直徑  $P'E'$  和实軸正方向的交角等于  $\varphi + 90^\circ$ . 后一个角等于  $\text{Arg } c' = \text{Arg } \frac{c-a}{c-b}$ . 但是点  $c$  在联結点  $a$  和  $b$  的圓弧  $PEQ$  上. 因为这个弧在点  $a$  的切綫和  $baN$  方向成角  $90^\circ + \varphi$ , 所以点  $c' = \frac{c-a}{c-b}$  应该在和实軸正方向成交角  $90^\circ + \varphi$  的射綫上, 就是  $\text{Arg } c' = 90^\circ + \varphi$ , 这正是需要証明的.

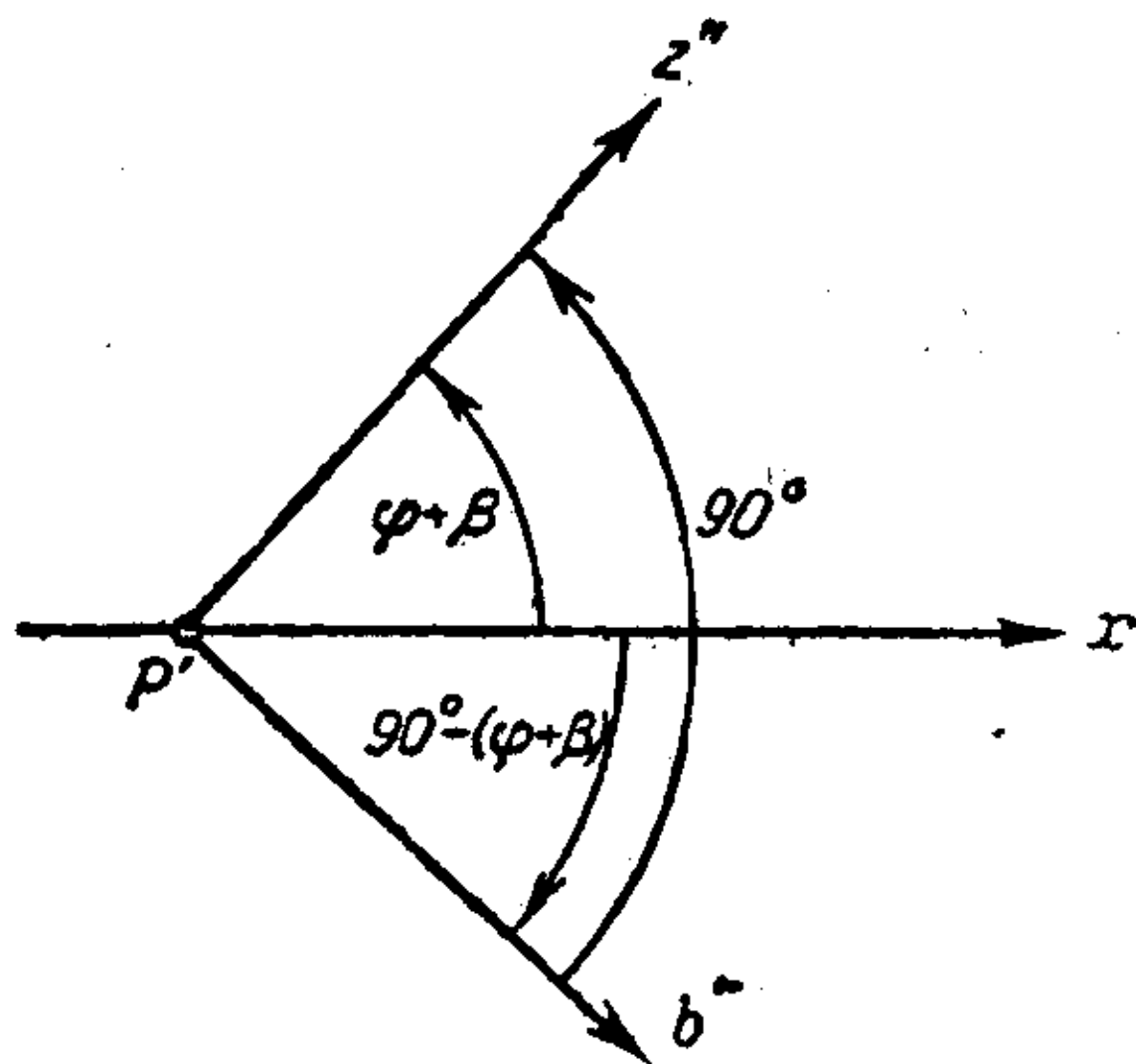


图 37.

30. 作为一个例子, 我們來說明图 38 左方阴影綫部分, 用函数  $z' = \frac{z-1}{z+1}$  作映象以后, 將变成什么样子. 这个函数具有形式  $\frac{z-a}{z-b}$ , 这里  $a=1$ ,  $b=-1$ . 因为弧  $PLQ$  經過点 1 和  $-1$ , 并且在点  $a=1$  和方向  $QPN$  相交成角  $\varphi$ , 所以根据第 28

① 在証明时, 我們取在弧  $PLE$  上的点  $z$ ; 这时对应点  $z'$  落在半圓  $P'L'E'$  上. 如果取在弧  $EMP$  上的点  $z$ , 証明并没有改变; 只是要注意, 这个圓弧在  $a$  点的切綫方向和  $PT_1$  相反. 这就是表示,  $\text{Arg } z''$  不等于  $\beta + \varphi$  而等于  $\beta + \varphi - 180^\circ$ . 因此, 得到  $\widehat{P'E'E'} = \text{Arg } \frac{z'}{z'-c'}$  的值是  $(\beta + \varphi - 180^\circ) - (\beta + \varphi - 90^\circ) = -90^\circ$ . 这相当于点  $z'$  在半圓  $E'M'P'$  上.

节的结果,这个弧将变换到从坐标原点开始并和实轴正方向相交成角 $\varphi$ 的射线. 弧 $PMQ$ 也是联结1和-1两点的圆弧,不过它在点 $a=1$ 和 $QPN$ 方向的交角是 $\varphi-180^\circ$  (这个角的绝对值等于 $180^\circ-\varphi$ ;但我们知道这个角是按顺时针方向转动的,这就是说,它的方向是负的). 因此,函数 $z' = \frac{z-1}{z+1}$ 把弧 $PMQ$ 变换到从原点开始并和实轴正方向相交成角 $\varphi-180^\circ$ 的射线 $P'M'$ . 显然,射线 $P'L'$ 和 $P'M'$ 合成一条直线;因此,函数 $z' = \frac{z-1}{z+1}$ 把整个圆周 $PLQM$  (由弧 $PLQ$ 和弧 $PMQ$ 组成)变换到整条直线 $M'P'L'$ .

通过点 $P$ 和 $Q$ 作一辅助圆弧,使这个圆在点 $P$ 的切线和 $QPN$ 方向成角 $\varphi+90^\circ$ . 这个圆弧和圆周 $PRS$ 相交于点 $E$ . 根据第28节的结果,弧 $PEQ$ 被函数 $z' = \frac{z-1}{z+1}$ 变换到从点 $P'$ 出发并和实轴正方向成交角 $\varphi+90^\circ$ 的射线. 这样,点 $E$ 就变换到这条射线上的一点 $E'$ . 根据第29节,圆周 $PRES$ 用函数 $z' = \frac{z-1}{z+1}$ 变换到以线段 $P'E'$ 作直径的圆周 $P'R'E'S'$ .

于是,结果圆周 $PLQM$ 变换到直线 $M'P'L'$ ,而内切于前

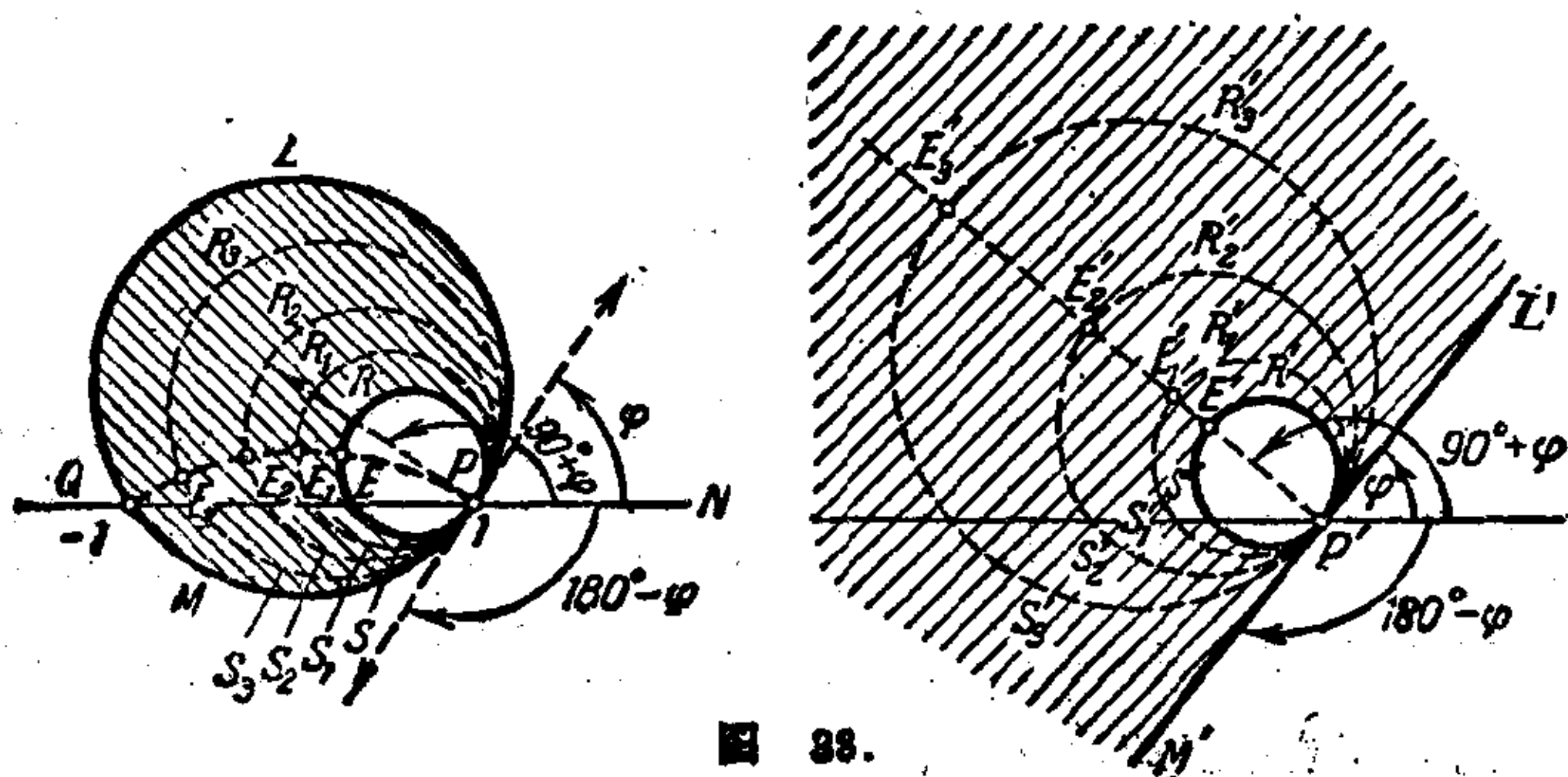


图 38.

一个圓周的圓周  $PRES$  变换到和直綫  $M'P'L'$  相切于点  $P'$  的圓周  $P'R'E'S'$ 。是不是可以認為，把图上阴影部分用函数  $z' = \frac{z-1}{z+1}$  来变换的問題已經完全解决了呢？不，問題还没有彻底解决：我們已經解决的只是这部分的边界的变换，还需要知道在圓  $PRES$  和  $PLQM$  内部各点的变换情形。

为了搞清楚这方面的情况，我們得注意，图上阴影部分可以用和  $PLQM$  相切于点  $P$  并处在  $PRES$  和  $PLQM$  間的圓周来填满。这种圓周和弧  $PEQ$  相交于在点  $E$  和点  $Q$  之間的一些点。在图 38 上，用虛綫画出了这种圓組成的无穷圓集合中的三个圓，它們和弧  $PEQ$  相交于点  $E_1, E_2$  和  $E_3$ ，如果我們知道这些圓用函数  $z' = \frac{z-1}{z+1}$  变换到什么曲綫，那末我們对于由这些曲綫填满而成的图形就可以想象得出。而这也正是原图形經過变换以后所得到的图形。

但是，根据第 29 节的結論，圓周  $PR_1E_1S_1$  变换到圓周  $P'R_1'E_1'S_1'$ ，圓周  $PR_2E_2S_2$  变换到  $P'R_2'E_2'S_2'$ ，等等。

在第 28 节末尾，我們指出，当点  $z$  順着弧  $PQ$  逐漸接近点  $Q$  时，它的对应点  $z'$  就順着以  $P'$  作始点的射綫离开点  $P'$  越来越远。由此可知，如果点  $E_2$  比点  $E_1$  更接近  $Q$ ，那末点  $E_2$  在射綫上的象点  $E_2'$  比  $E_1$  的象点  $E_1'$  离  $P'$  更远。因此，圓周  $PR_2E_2S_2$  的象圓  $P'R_2'E_2'S_2'$  的直径  $P'E_2'$  就比圓周  $PR_1E_1S_1$  的象圓  $P'R_1'E_1'S_1'$  的直径  $P'E_1'$  更長，这在我們的图上就已經表示出来了。如果取圓周  $PR_3E_3S_3$ ，使它和弧  $PEQ$  的交点十分接近点  $Q$ ，那末我們可以得到，它的象  $P'R_3'E_3'S_3'$  具有尽可能大的直径。显然，填满图 38 左方阴影图形的圓周



$PR_1E_1S_1$ 、 $PR_2E_2S_2$ 、 $PR_3E_3S_3$  等的象圓，將填滿图 38 右方的阴影图形。后者正是原来图形用函数  $z' = \frac{z-1}{z+1}$  变换以后所得的象。因此，函数  $z' = \frac{z-1}{z+1}$  把两个圓周包围成的图形(图 38 左方)变换到以一直綫和一圓周作界綫的图形(图 38 右方)。

31. 現在我們来討論用函数  $z' = z^2$  所作的变换。在第 26 頁的注里，我們已經預示讀者，对于用有理函数所作的变换，保持角度不变的規律可能出現例外。这就是說，以某些例外点作頂的角，經過变换以后，可能变大了若干倍。在現在討論的这个情形，就有这种例外点；它就是原点  $A$ 。我們說，所有以  $A$  作頂的角，用  $z' = z^2$  变换以后，都变成了原来的兩倍。

取由  $A$  点出发、和实軸正方向相交成角  $\varphi$  的射綫  $AM$  (图

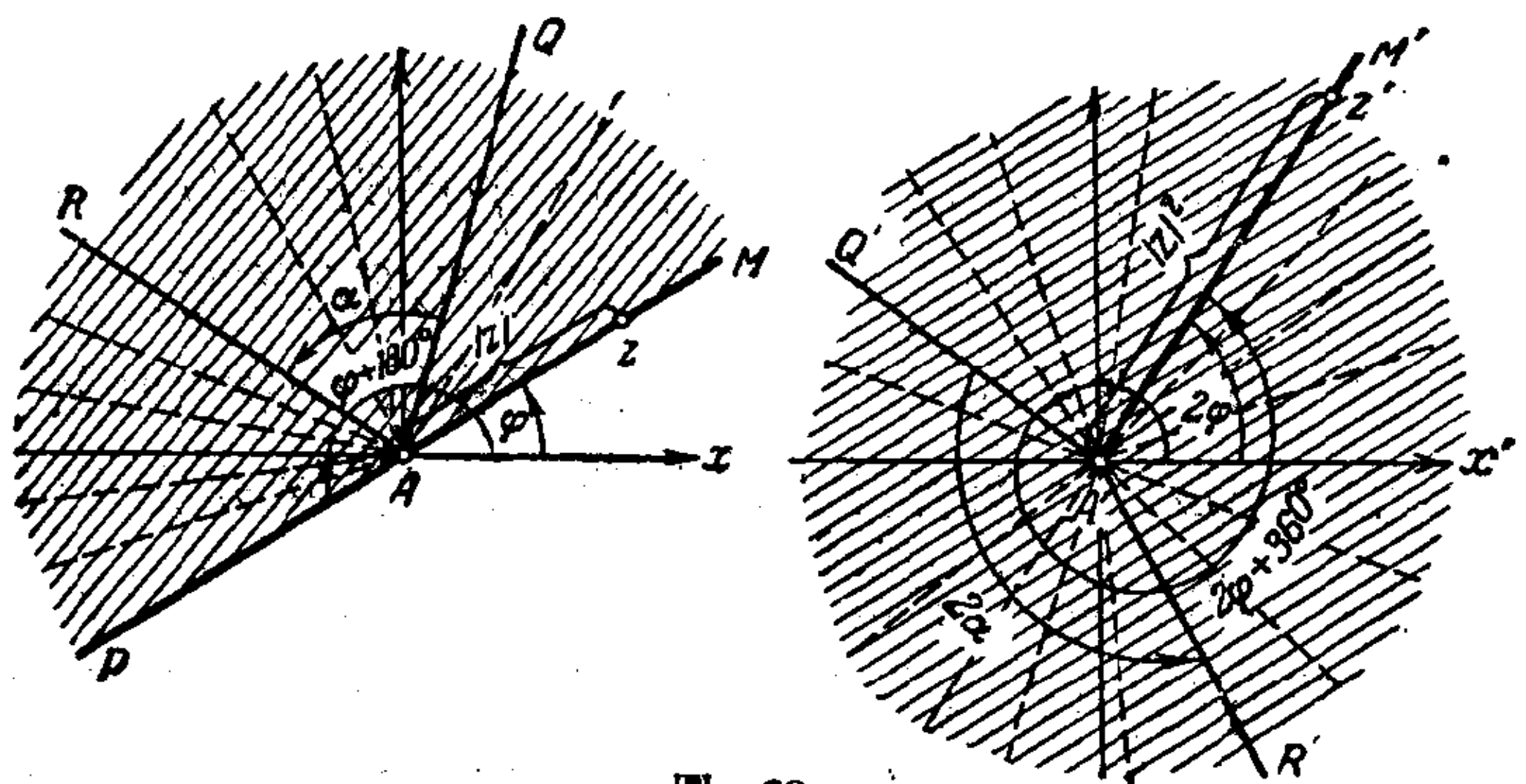


图 39.

39). 对于在这条射綫上的每一点  $z$ ,  $\text{Arg } z = \varphi$ . 因为向量  $z' = z^2 = z \cdot z$  是把向量  $z$  伸長到  $|z|$  倍并把幅角  $\text{Arg } z = \varphi$  扩大到兩倍得到的, 所以  $|z'| = |z| \cdot |z| = |z|^2$ , 而  $\text{Arg } z' = \text{Arg } z + \text{Arg } z = 2\varphi$ . 因此, 点  $z'$  一定在从点  $A'$  出发并和实軸正方向相交



成角  $2\varphi$  的射綫  $A'M'$  上。如果点  $z$  順着  $AM$  从  $A$  点无限远离开去, 那末对应点  $z'$  將順着  $A'M'$  从  $A'$  点无限远离开去; 这时候, 点  $z'$  到点  $A'$  的距离始終等于点  $z$  到点  $A$  距离的平方 ( $|z'| = |z|^2$ )。

由此可知, 函数  $z' = z^2$  把射綫  $AM$  变换到射綫  $A'M'$ , 并且  $A'M'$  和  $A'x'$  軸的傾斜角等于  $AM$  和  $Ax$  軸的傾斜角的兩倍。

容易想見, 和  $Ax$  軸相交成角  $\varphi + 180^\circ$  的射綫  $AP$  ( $AM$  和  $AP$  在同一直綫上), 也用函数  $z' = z^2$  变换成射綫  $A'M'$ 。事实上, 如果把角  $\varphi + 180^\circ$  加倍, 就得到  $2\varphi + 360^\circ$ ; 和  $A'x'$  相交成这个角度的射綫和射綫  $A'M'$  重合。

試看图 39 左方的阴影图形——所謂半平面——用函数  $z' = z^2$  变换后的图形是什么。半平面可以看作是由  $A$  点出发、和  $Ax$  的傾斜角大于  $\varphi$  但小于  $\varphi + 180^\circ$  的射綫填滿而成的图形。射綫  $AM$  和  $AP$  組成半平面的边界 (一条直綫); 我們不把这两条射綫算在半平面以內。函数  $z' = z^2$  把半平面內的所有射綫变换成从  $A'$  出发并和  $A'x'$  的傾斜角大于  $2\varphi$  但小于  $2\varphi + 360^\circ$  的所有射綫。

由此可知, 以射綫  $AM$  和  $AP$  作边界的半平面, 变换成以单独一条射綫  $A'M'$  作边界的图形 (见图 39 右方)。变换成的图形可以看作一个平面, 但是它不包括射綫  $A'M'$ 。既然这样說, 我們就要証明, 这个图形是由平面上除了在  $A'M'$  上的以外的点組成的。如果在半平面內任意取兩条射綫  $AQ$  和  $AR$ , 和  $Ax$  的傾斜角分別等于  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  ( $\varphi_2 > \varphi_1$ ), 那末它們的

交角是  $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$ . 函数  $z' = z^2$  把这两条射线变换成  $A'Q'$  和  $A'R'$ , 它们和  $A'x'$  的倾斜角分别是  $2\varphi_1$  和  $2\varphi_2$ . 显然, 角  $Q'A'R'$  等于  $2\varphi_2 - 2\varphi_1 = 2(\varphi_2 - \varphi_1) = 2\alpha$ .

因此, 以  $A$  作顶的角, 用  $z' = z^2$  变换以后, 变成了原来的两倍, 换句话说, 就是映象在  $A$  点失去了保角性.

32. 我们来证明, 用  $z' = z^2$  变换以后, 以任何点  $z_0 \neq 0$  作顶的角都保持不变. 由此可知, 坐标原点是使以上变换失去保角性的唯一的点.

设  $L$  是一条从点  $z_0$  出发的任何曲线. 如果在  $L$  上取  $z_0$  以外的任意一点  $z_1$ , 那末联结  $z_0$  和  $z_1$  的割线的方向跟表示差数  $z_1 - z_0$  的向量  $Q_0Q_1$  一致 (图 40 左方). 函数  $z' = z^2$  把曲线  $L$  变换成某一曲线  $L'$ , 把点  $z_0$  和  $z_1$  变换成在曲线  $L'$  上的新的点  $z'_0 = z_0^2$  和  $z'_1 = z_1^2$ . 显然, 联结  $z'_0$  和  $z'_1$  的割线的方向跟表示差数  $z'_1 - z'_0$  的向量  $Q'_0Q'_1$  一致 (图 40 右方). 我们来比较这两条割线的方向; 这只要比较向量  $z'_1 - z'_0$  和  $z_1 - z_0$  的

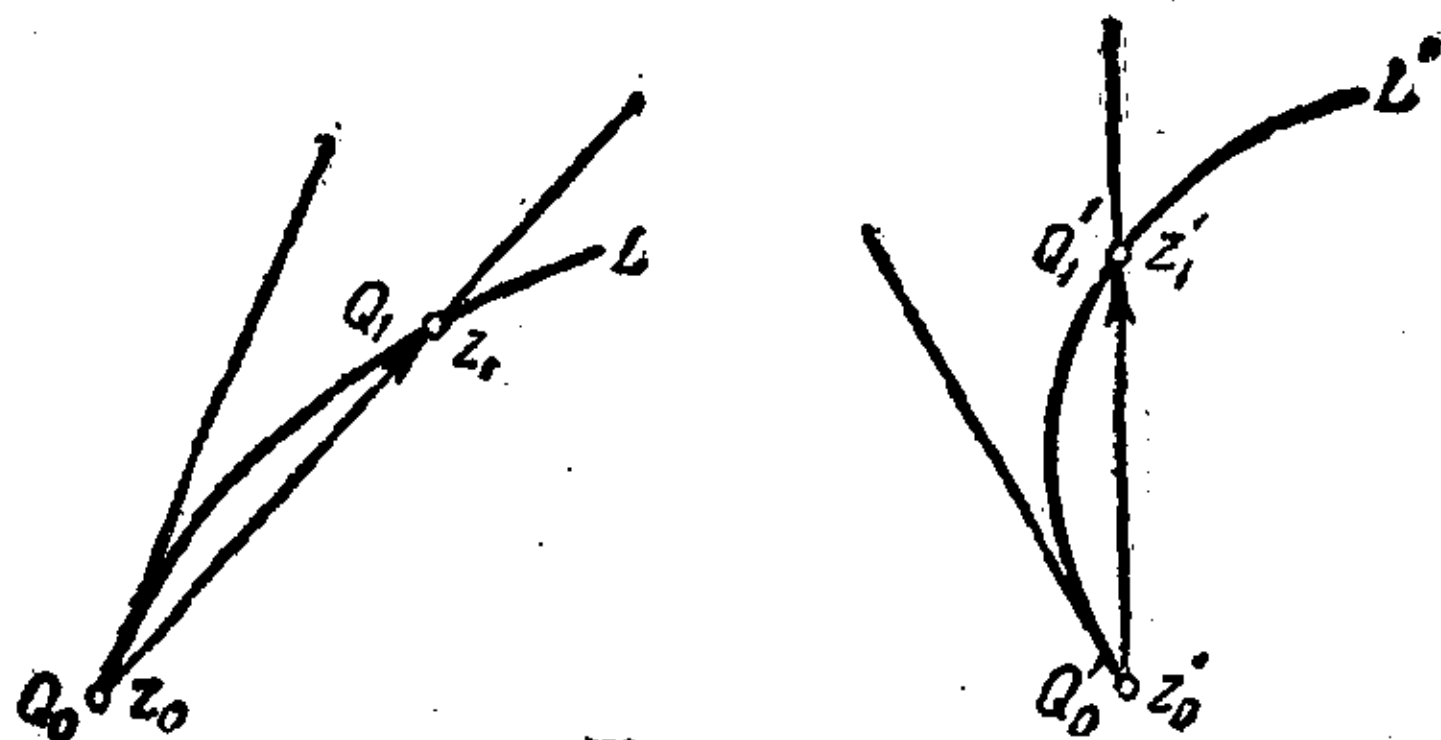


图 40.

方向就行了. 因为它们的角度是看作由向量  $z_1 - z_0$  旋转到向量  $z'_1 - z'_0$  的角度的, 它正好等于商数  $\frac{z'_1 - z'_0}{z_1 - z_0}$  的幅角, 所以问

題就变成了計算  $\text{Arg} \frac{z_1' - z_0'}{z_1 - z_0}$ . 在商數  $\frac{z_1' - z_0'}{z_1 - z_0}$  里, 可以代入  $z_1' = z_1^2, z_0' = z_0^2$ . 得到:

$$\frac{z_1' - z_0'}{z_1 - z_0} = \frac{z_1^2 - z_0^2}{z_1 - z_0} = z_1 + z_0$$

以及  $\text{Arg} \frac{z_1' - z_0'}{z_1 - z_0} = \text{Arg}(z_1 + z_0)$ .

因此, 曲綫  $L'$  和  $L$  上通过对应点对  $z_0, z_1$  ( $L$  上的) 和  $z_0' = z_0^2, z_1' = z_1^2$  ( $L'$  上的) 的兩条割綫的交角等于  $\text{Arg}(z_1 + z_0)$ . 从割綫轉变到切綫, 点  $z_1$  將沿曲綫  $L$  无限趋近点  $z_0$ .

这时候, 点  $z_1' = z_1^2$  也將沿曲綫  $L'$  无限趋近点  $z_0' = z_0^2$ . 因此, 这两条割綫也就无限趋近从点  $z_0$  和  $z_0'$  引出的兩条切綫, 兩割綫的交角也就无限趋近兩切綫的交角. 但是兩割綫的交角等于  $\text{Arg}(z_0 + z_1)$ , 当  $z_1$  趋近  $z_0$  时, 这个交角就趋近  $\text{Arg}(2z_0)$ ;  $\text{Arg}(2z_0)$  是和  $\text{Arg} z_0$  完全相同的. 因此, 从曲綫  $L'$  和  $L$  上的对应点  $z_0' = z_0^2$  和  $z_0$  引出的兩切綫的交角等于  $\text{Arg} z_0$ . 例如, 設使  $z_0 = 2$ , 那末  $\text{Arg} z_0 = 0$ ; 因而知道, 通过点  $z_0 = 2$  的任意曲綫  $L$  在这一点切綫, 方向和  $L$  用函数  $z' = z^2$  变换以后得到的曲綫  $L'$  在点  $z_0' = z_0^2 = 4$  的切綫一致. 設使  $z_0 = i$ , 那末  $\text{Arg} z_0 = 90^\circ$ ; 因此, 通过点  $z_0 = i$  的任意曲綫  $L$  在这一点切綫, 和映象曲綫  $L'$  在点  $z_0' = i^2 = -1$  的切綫互相垂直.

回到一般的情形, 我們可以說, 当通过点  $z_0$  的曲綫用函数  $z' = z^2$  作变换时, 曲綫在点  $z_0$  的切綫旋轉了一个等于  $\text{Arg} z_0$  的角.

現在就不难看出, 为什么在这种变换里, 以  $z_0$  ( $z_0 \neq 0$ ) 作頂的角度是不变的. 設通过点  $z_0$  有兩条曲綫  $L_1$  和  $L_2$ , 它們

在这一点上的交角是  $\alpha$ , 这就是說, 兩曲綫在点  $z_0$  的切綫的交角等于  $\alpha$ . 經過变换以后, 点  $z_0$  变换到点  $z'_0 = z_0^2$ , 曲綫  $L_1$  和  $L_2$  变换到  $L'_1$  和  $L'_2$ . 新曲綫在点  $z'_0$  的切綫的方向, 可以从旧曲綫在点  $z_0$  的切綫旋轉一个同样的等于  $\text{Arg } z_0$  的角度得到. 显然, 兩条新切綫間的角度仍旧是  $\alpha$ . 这正表明了, 兩曲綫以任意点  $z_0 \neq 0$  作頂的夾角, 用  $z' = z^2$  变换以后, 大小是不变的.

注意, 我們用来証明保角映象  $z' = z^2$  的方法, 对于其他函数, 例如綫性分式函数  $z' = \frac{z-a}{z-b}$  或儒科夫斯基函数  $z' = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  也都适用. 这里只是切綫旋轉的角度要用不同的式子来表示. 例如, 对于綫性分式函数, 通过点  $z_0$  的曲綫在这一点上的切綫旋轉的角度等于  $\text{Arg} \frac{a-b}{(z_0-b)^2}$ , 而在儒科夫斯基函数的情形, 这个旋轉角度等于  $\text{Arg} \left( 1 - \frac{1}{z_0^2} \right)$ . 在前一种情形, 必須附加条件  $z_0 \neq b$  (在点  $z_0 = b$ , 分式  $\frac{z-a}{z-b}$  沒有意义); 在后一种情形, 必須附加条件  $z_0 \neq 0$  (理由同上), 此外还得假設  $z_0 \neq \pm 1$  (在  $z_0 = \pm 1$  时,  $1 - \frac{1}{z_0^2}$  等于零, 因此  $\text{Arg} \left( 1 - \frac{1}{z_0^2} \right)$  沒有意义). 可以驗證, 儒科夫斯基函数在点  $-1$  和  $+1$  失去保角性: 以这两点作頂的角度, 經過变换以后, 扩大到原来的兩倍.

33. 現在来看, 通过点  $A$  的圓, 用函数  $z' = z^2$  变换以后, 变换成什么. 設圓在点  $A$  的切綫和  $Ax$  相交成角  $\varphi$  (图 41). 显然, 圓整个在以这条切綫作界綫的半平面內. 函数  $z' = z^2$  把半平面变换成不包括射綫  $A'M'$  的平面. 为了决定这个圓經過变换以后的象, 在半平面內从  $A$  尽可能引一些射綫, 并标出每一条射綫和圓周的交点. 在我們的图上画了七条射

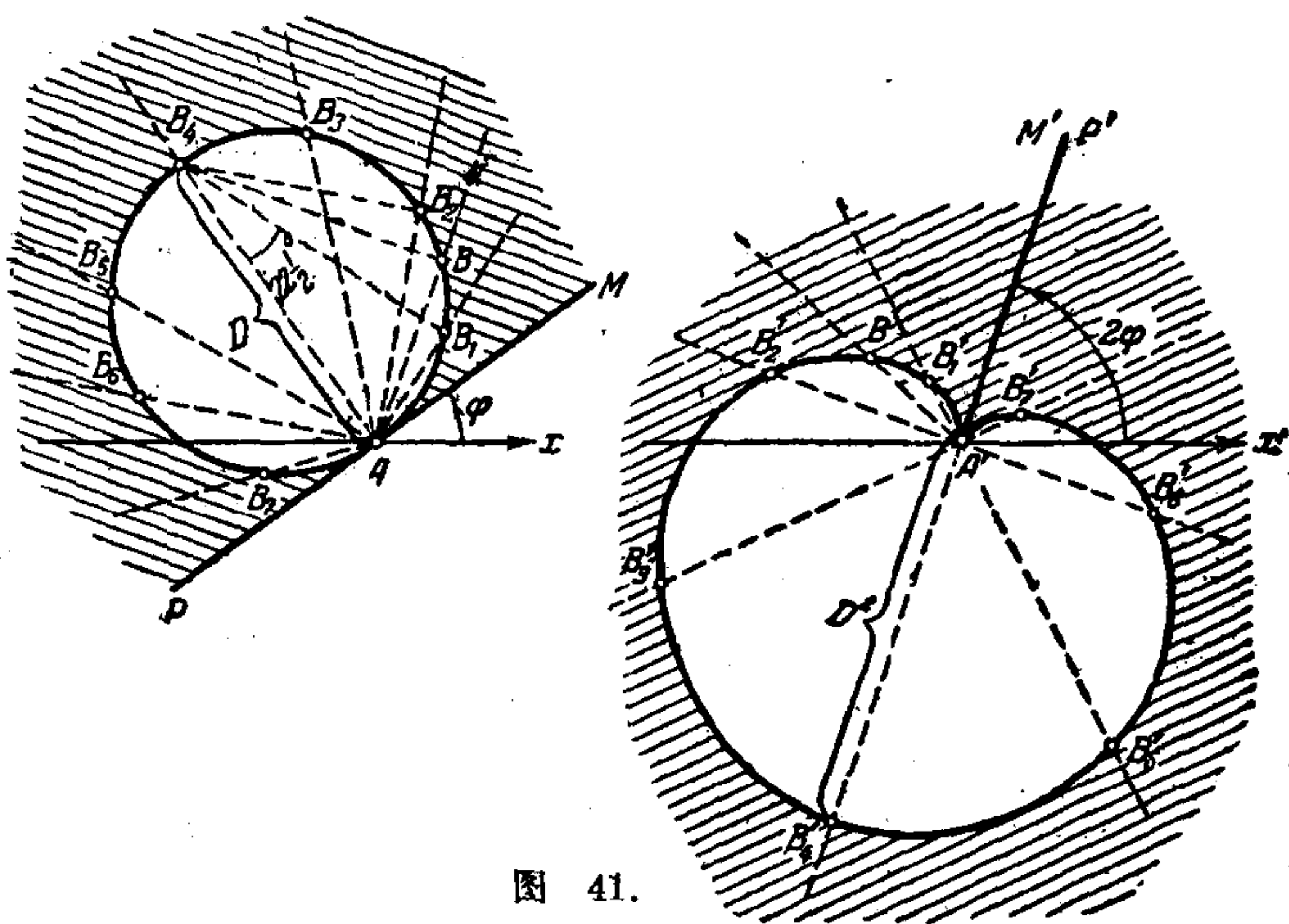


图 41.

綫；所有的角， $MAB_1, B_1AB_2, B_2AB_3, \dots, B_7AP$  都相等（等于  $22\frac{1}{2}^\circ$ ）。函数  $z' = z^2$  把这七条射綫变换成另外七条射綫，每两条射綫的交角扩大到原来的兩倍；所有的角  $M'A'B_1', B_1'A'B_2', B_2'A'B_3', \dots, B_7'A'P'$  都等于  $45^\circ$ 。

我們来計算一下，点  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_7$  变换到什么地方去了。象点  $B_1', B_2', B_3', \dots, B_7'$  到点  $A'$  的距离，分別等于  $AB_1, AB_2, AB_3, \dots, AB_7$  的平方。但是从图41立刻看出， $AB_7 = AB_1 = AB_4 \sin 22\frac{1}{2}^\circ = D \sin 22\frac{1}{2}^\circ$ （ $D$  是圓的直徑）；又  $AB_6 = AB_2 = D \sin 45^\circ, AB_5 = AB_3 = D \sin 67\frac{1}{2}^\circ, AB_4 = D$ 。再要注意， $\sin^2 22\frac{1}{2}^\circ = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} = \frac{2 - 1.4142}{4} = 0.1464 \dots, \sin^2 45^\circ = 0.5000 \dots, \sin^2 67\frac{1}{2}^\circ = \cos^2 22\frac{1}{2}^\circ = 1 - \sin^2 22\frac{1}{2}^\circ = 0.8535 \dots$  因此， $A'B_7' = A'B_1'$



$= 0.1464 D^2$ ,  $A'B_6' = A'B_2' = 0.5000 D^2$ ,  $A'B_5' = A'B_3' = 0.8535 D^2$ ,  $A'B_4' = D^2$ . 经过  $A', B_1', B_2', B_3', \dots B_7'$  这些点的曲线, 就是圆用  $z' = z^2$  作变换后的象. 如果要得到它的更精确的形象, 可以取更多的射线. 这种曲线叫做心臟线. 容易看出, 图 41 左方阴影部分表示的图形 (由半平面除去一圆得到的图形), 用函数  $z' = z^2$  作变换以后, 变换成了图 41 右方阴影部分所表示的图形. 后者是以心臟线以及和实轴正方向成  $2\varphi$  角的射线作界线的. 可以证明, 射线  $A'M'$  的方向就是和心臟线的两个弧相切的由  $A$  点出发的切线方向. 在图 41 左方, 任意引射线  $AB$ ,  $B$  表示这射线和圆的交点; 如果角  $MAB = \alpha$ , 那末  $AB = D \sin \alpha$ . 用函数  $z' = z^2$ , 这条射线变换成射线  $A'B'$  (图 41 右方), 点  $B$  的象点  $B'$  落在心臟线上. 根据我们知道的  $z' = z^2$  变换的性质:  $\widehat{M'A'B'} = 2\alpha$ ,  $A'B' = AB^2 = D^2 \sin^2 \alpha$ . 设角  $\alpha$  在变动, 并且无限趋近于零. 那末  $A'B'$  和  $A'M'$  的交角  $2\alpha$  也将无限趋近于零, 而心臟线的割线——射线  $A'B'$  将围绕点  $A'$  转动, 并且无限趋近极限位置  $A'M'$ . 这时候, 点  $B'$ ——割线和心臟线离  $A'$  最近的一个交点, 将无限趋近点  $A'$ , 因为当  $\alpha$  趋近于零时, 距离  $A'B' = D^2 \sin^2 \alpha$  也趋近于零. 由此可知, 割线的极限位置  $A'M'$  是弧  $A'B_1'B_2' \dots$  在点  $A'$  的切线. 同样可以证明,  $A'M'$  也是弧  $A'B_7'B_6' \dots$  在同一点  $A'$  的切线.

34. 最后, 我们转到儒科夫斯基函数  $z' = \frac{1}{2} (z + \frac{1}{z})$ , 并且用它来变换由两个圆围成的图形: 一个圆通过点  $-1$  和  $+1$ , 另一个圆在点  $1$  内切于前一个圆. 图 42 的阴影部分表示这个图形.



先来証明,  $z' = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$  变换可以化成几个我們已經熟悉的、形式比較簡單的变换。为了达到这个目的, 我們来研究一下分式  $\frac{z'-1}{z'+1}$ 。用  $\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$  来代替  $z'$ , 得到:

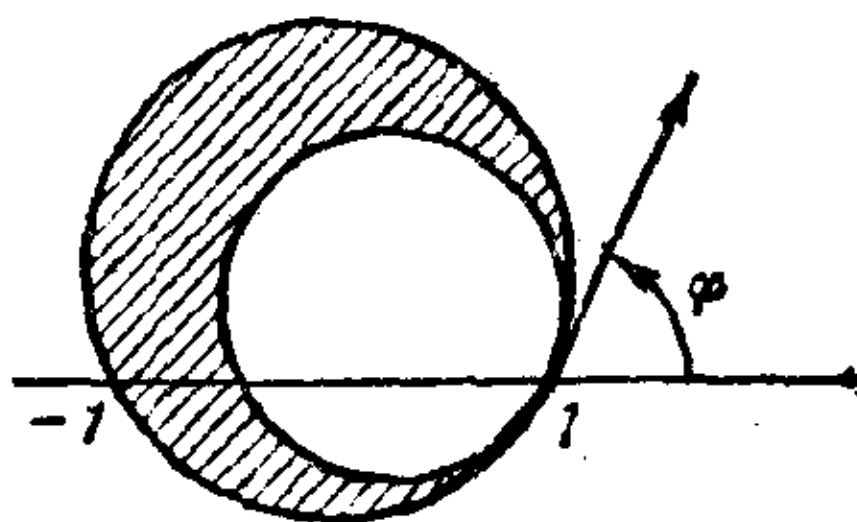


图 42.

$$\frac{z'-1}{z'+1} = \frac{\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) - 1}{\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) + 1} = \frac{z^2 + 1 - 2z}{z^2 + 1 + 2z} = (\frac{z-1}{z+1})^2.$$

因此, 从  $z' = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$  可以推出  $\frac{z'-1}{z'+1} = (\frac{z-1}{z+1})^2$ . 反过来也是正确的: 从第二个式子可以推出第一个式子。事实上, 从第二个式子可以得到:

$$z' - 1 = z' \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2,$$

由此可得 
$$z' \left[1 - \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2\right] = 1 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$$

以及 
$$z' = \frac{1 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2}{1 - \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2} = \frac{(z+1)^2 + (z-1)^2}{(z+1)^2 - (z-1)^2}$$

$$= \frac{2z^2 + 2}{4z} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

于是, 关系式  $z' = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$  和  $\frac{z'-1}{z'+1} = (\frac{z-1}{z+1})^2$  完全等价(从这一个可以推出另一个)。

因此, 儒科夫斯基函数  $z' = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$  变换可以表示成  $\frac{z'-1}{z'+1} = (\frac{z-1}{z+1})^2$  形式。两种表示形式会得到同样的結果。但

是現在可以看出,从  $z$  轉变到  $z'$  可以分三步实现。先从  $z$  轉变到輔助变数  $z_1$ , 可以用公式:

$$z_1 = \frac{z-1}{z+1}; \quad (1)$$

再从  $z_1$  轉变到  $z_2$ , 根据公式:

$$z_2 = z_1^2; \quad (2)$$

最后,从  $z_2$  轉变到  $z'$ , 根据公式:

$$\frac{z'-1}{z'+1} = z_2. \quad (3)$$

讀者很容易明白,要是把公式(1)的表示  $z_1$  的式子代入公式(2),再把得到的表示  $z_2$  的式子代入公式(3),那就得到了我們需要的变换  $\frac{z'-1}{z'+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$ .

为什么要用(1)、(2)、(3)三个变换来代替一个儒科夫斯基变换呢?就是因为这三个变换个个比儒科夫斯基变换簡單,并且个个都是我們已經熟悉的。

于是,我們就来对图 42 上的图形作公式(1)的变换,再把得到的图形作公式(2)的变换,最后再把得到的图形作公式(3)的变换。

回忆在第 30 节,我們已經知道,图 38 左方的图形(它和图 42 的图形一样)用函数  $z_1' = \frac{z-1}{z+1}$  (就是函数(1))来变换,就变换成图 38 右方的图形。图 38 右方图形的边界是通过点  $O$  和实軸正方向相交成角  $\varphi$  的一条直綫,以及和这条直綫相切于点  $O$  的一个圓。这个图形可以看作是除去一个圓的半平面。这个图形再用函数  $z_2 = z_1^2$  (就是函数(2))来变换。只要看一看图 41,就知道这問題在第 33 节已經解决了。在第 33

节末了我們曾經指出，变换后應該得到图 41 右方的图形；它是以一个心臟綫和一条射綫作界綫的图形。現在剩下來的，就是把这个图形再作  $\frac{z'-1}{z'+1} = z_2$  (就是函数(3)) 的变换。在这里， $z'$  可以看作是独立变数， $z_2$  可以看作是函数。根据第 28 节講的，当  $z_2$  画出从原点出发、并和实軸正方向相交成角  $2\varphi$  的射綫  $A'M'$  时，对应点  $z'$  就会画出一个联結点  $+1$  和  $-1$  的圓弧；这个圓弧在点  $+1$  的切綫，跟从点  $-1$  到点  $+1$  的方向，就是实軸的正方向，形成的角也是  $2\varphi$  (图 43)。

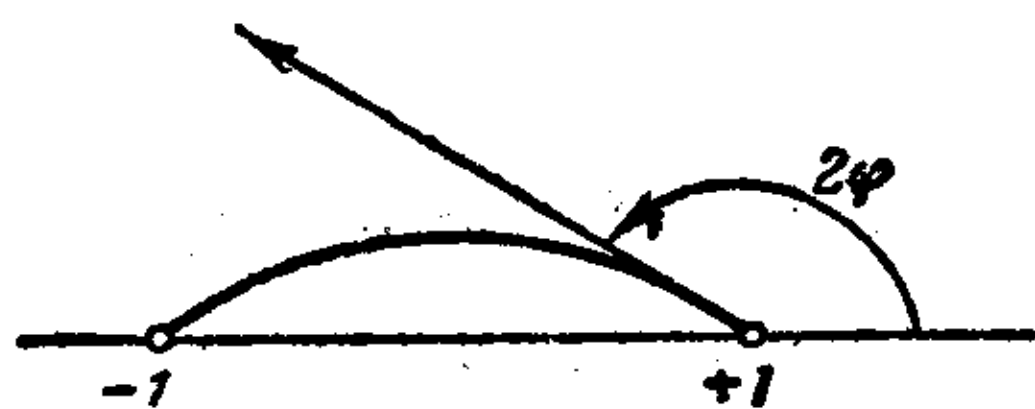


图 43.



图 44.

这样，我們就得到了射綫  $A'M'$  經過  $\frac{z'-1}{z'+1} = z_2$  变换后的象。为要求得心臟綫的象，可以看看点  $B_1', B_2', \dots, B_7'$  变换到了什么地方。但是，我們不預备在这里作繁复的計算，只要能够作出变换得的曲綫的完整形狀如图 44 就行了。

这个曲綫的形狀象机翼横断面，就是翼型。这种翼型是俄国学者查普列金和儒科夫斯基首創的，因此叫做儒科夫斯基-查普列金翼型。改变圓在点  $+1$  的切綫的傾斜角 (图 42) 和小圓半徑，可以得到种种不同的翼型。特別在  $\varphi$  是直角时，就是說，大圓以  $-1$  到  $+1$  的綫段作直徑时，对应的翼型是和实軸对称的 (图 45)。这种翼型有时候也叫儒科夫斯基舵。

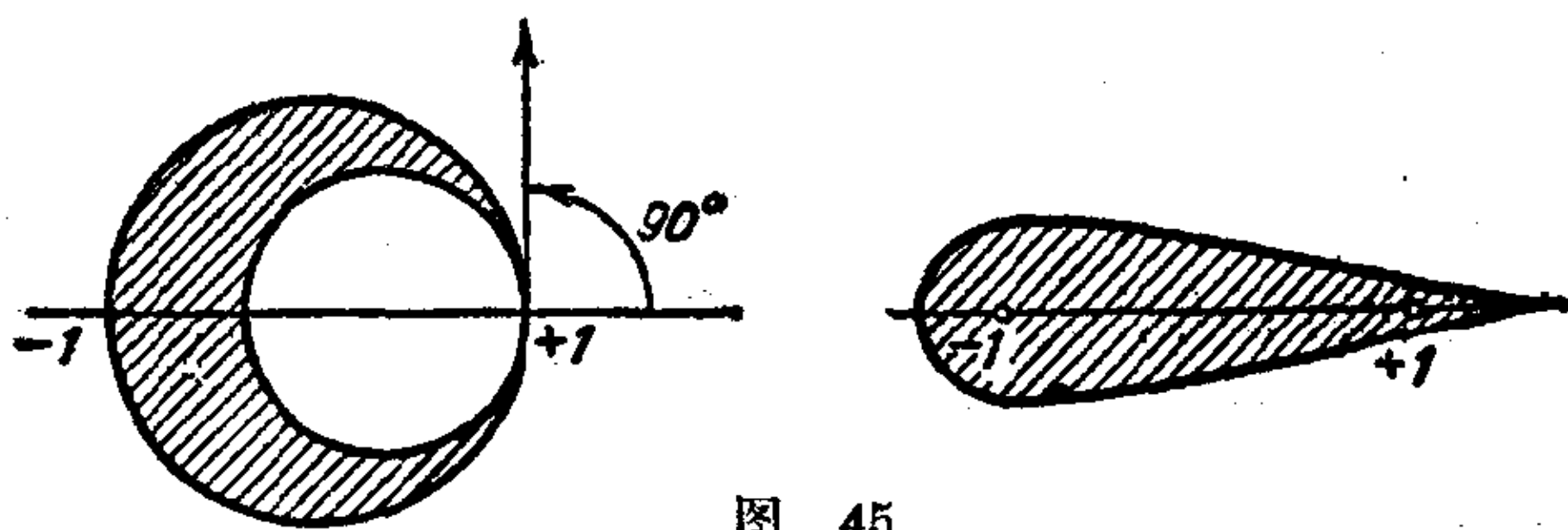


图 45.

儒科夫斯基-查普列金翼型是有关机翼的一切理論研究的基本翼型。

## 习 題

1. 設兩個复数  $c_1 = a_1 + b_1 i$  和  $c_2 = a_2 + b_2 i$  相等, 試証明它們的实部分和虚部分也分別相等:  $a_1 = a_2, b_1 = b_2$ .

提示 表示相等复数的向量, 一定長短相同、互相平行、并且方向一致。

2. 应用加法和乘法的交換律、結合律和分配律, 来完成下列的复数运算:

1.  $(3 - 7i) + (-2 + i) + (-1 + 5i);$

2.  $(3 - 7i)(3 + 7i);$      3.  $(1 + i)(1 + i\sqrt{3});$

4.  $(1 + i)^2 \div (1 - i)^2;$      5.  $(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})^4.$

答: 1.  $-i;$  2. 58; 3.  $1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3});$  4.  $-1;$  5.  $-1.$

3. 对于任意复数  $c = a + bi \neq 0$ , 設它的绝对值等于  $r$ , 幅角等于  $\alpha$ , 試証明:

$$c = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

(复数的三角函数式).

提示 作一图,在图上  $c=a+bi$  是用向量来表示的. 靠图的帮助,用  $r$  和  $\alpha$  来表示出  $a$  和  $b$ .

4. 試証明:如果

$$c_1=r_1(\cos \alpha_1+i \sin \alpha_1), \quad c_2=r_2(\cos \alpha_2+i \sin \alpha_2),$$

那末  $c_1 c_2=r_1 r_2[\cos(\alpha_1+\alpha_2)+i \sin(\alpha_1+\alpha_2)]$ .

提示 利用复数乘法規則的几何形式,或者用乘法和加法規則,把  $c_1$  和  $c_2$  直接乘出来,再用和的正弦余弦的公式.

5. 根据前一个习题的結果,来証明:如果

$$c=r(\cos \alpha+i \sin \alpha)$$

( $r$  是  $c$  的绝对值,  $\alpha$  是  $c$  的幅角),那末

$$c^n=r^n(\cos n\alpha+i \sin n\alpha)$$

( $n$  是自然数). 并由此导出:

$$(\cos \alpha+i \sin \alpha)^n=\cos n\alpha+i \sin n\alpha$$

(第美弗氏公式).

6. 用第美弗氏公式(見第5題),計算:

$$1. \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{100}; \quad 2. \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{217}.$$

提示  $\frac{\sqrt{2}}{2}+i \frac{\sqrt{2}}{2}=\cos 45^\circ+i \sin 45^\circ$ ;  $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}=\cos 30^\circ+i \sin 30^\circ$ .

$$\text{答: } 1. -1; \quad 2. \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}.$$

7. 从第美弗氏公式出发(見第5題),导出  $\cos n\alpha$  和  $\sin n\alpha$  在  $n=2, 3$  和  $4$  时的公式.

**提示** 在第美弗氏公式  $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$  中, 把  $\cos \alpha + i \sin \alpha$  的  $n$  次方直接乘出(例如,  $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^2 = \cos^2 \alpha + 2i \sin \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha$ ), 然后再使第美弗氏公式等号双方的实部分和实部分相等、虚部分和虚部分相等就行了.

**答:**  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ ;  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ;  $\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha$ ;  $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha$ ;  $\cos 4\alpha = \cos^4 \alpha - 6 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha$ ;  $\sin 4\alpha = 4 \sin \alpha \cos^3 \alpha - 4 \sin^3 \alpha \cos \alpha$ .

8. 以点  $0, 1-i, 1+i$  作顶的三角形, 经过

$$z' = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) z$$

变换, 结果怎么样? 这个变换的几何意义是什么?

**提示** 从探讨几何意义着手. 但是, 也可以从计算变换得到的三角形的顶点着手.

9. 以  $-1$  到  $+1$  的线段作直径并在实轴上方的半圆, 经过  $z' = \frac{z-1}{z+1}$  变换, 结果怎么样?

**答:** 变换成虚轴上半部分和实轴负的部分围成的直角.

10. 以坐标原点作顶的角  $\alpha$ , 经过  $z' = z^3$  变换以后, 变换成什么?

**答:** 变换成以坐标原点作顶的角  $3\alpha$ .